

جامعترین مرجع فارسی

# ریاضی

درسنامه + سوالات شبیه‌ساز یوس

جلد اول

• ویرایش چهارم •



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نسخه دمو ریاضی

# ریاضی خود آموز یوس

## جلد اول

نسخه دمو ریاضی

## شناسنامه کتاب

نام کتاب	ریاضی خود آموز یوس - جلد اول
مؤلف	گروه آموزشی یوس کوبیز
ناشر	گروه آموزشی یوس کوبیز
چاپ و صحافی	دنیز
طراح جلد	ریحانه رضا شاطری
صفحه آرا	پویا احدی
نوبت چاپ	چهارم / ۱۴۰۰

## پیشگفتار

به نام او که جان را فکرت آموخت...

معلمانمان را سپاس که آموختند، منت خدای راست عزّ و جلّ که قدرتی داد تا انسان بیندیشد و محبتی اعطا کرد تا آنچه را که اندیشیده، نشر دهد.

مجموعه‌ی حاضر، بهانه‌ای است در رساندن اندیشه‌ی صحیح به فرهیختگان و جامعه‌ی علم و دانش.

در تنظیم این مجموعه تلاش شده که دقیق‌ترین، مهم‌ترین و موثرترین محتوا ارائه گردد و امید است تا خوانندگان محترم، با مطالعه‌ی دقیق این اصول، خود بتوانند آن‌ها را به معرکه‌ی تحلیل و نقد آورده و پاسخ برخی از پرسش‌ها و شبهات آینده را نیز کسب کنند.

یوس کوییز، شنیدار پیشنهادات، انتقادات و ایده‌های عزیزان و بزرگواران است و این موضوع را همواره از بزرگترین افتخارات خود می‌داند که با مخاطبان خود، در ارتباط موثر و دائمی بوده است. تلاشمان بر هرچه بیشتر نمودن ارتباطات دوجانبه است.

امید است در پایان مسیری که نقشه‌اش را برای خود ترسیم کرده‌اید، در قله‌ی افتخارات باشید؛ افتخاراتی که علاقه‌مندیم تا سهمی هرچند کوچک از آن را داشته باشیم.

بهترین لحظه برای یوس کوییز و عوامل حاضر، موفقیت هریک از فراگیران است.

**با آرزوی بهترین اتفاقات.**

**مدیریت یوس کوییز**

## **سخن مولفان:**

### **ضمن اظهار افتخار بابت همراهی فراگیران عزیز؛**

کتاب حاضر بر اساس مطالعات و بررسی روی سوالات سنوات اخیر آزمون‌های یوس دانشگاه‌های ترکیه به رشته‌ی تالیف درآمده و طبق آخرین تحلیل‌ها از دنیای یوس، ویرایش شده تا آماده‌ی تحویل به جامعه‌ی فراگیران باشد.

در آغاز، توضیحی کوتاه در جهت کمک به مطالعه‌ی هرچه موثرتر این مجموعه ارائه کرده‌ایم. امید بر این است تا هرچه پیش می‌رویم، قدم‌هایمان استوارتر و بزرگتر برداشته شود.

هدف مشخص است. اما در رسیدن به آن، راه‌های گوناگونی را می‌توانید بیمایید و تصمیم به کلی در اختیار خود خود شماست. ما به عنوان کسانی که برهه‌ای از زندگی‌مان را در همین راه سپری کرده‌ایم و مسافران گوناگون، مشخصه‌های مثبت و نیز سهو و خطاهایشان را زیر ذره‌بین گرفته‌ایم، پس از انجام مطالعات فراوانمان در راستای رسیدن به اندوخته‌ای جامع، علمی و منطبق بر تمام شرایط، نتیجه‌ی حاصل را در قالب این مجموعه تقدیمتان می‌نماییم تا مقداری هر چند کوچک از سختی‌های راه کاسته باشیم.

### **اشاره‌ای به کلیات فصل‌ها:**

در مطالعه‌ی این مجموعه، مشاهده خواهید نمود که مطالب به این صورت تقسیم‌بندی می‌شوند:

درسنامه: سعی شده است تمام مطالب مورد نیاز شما در امتحانات ورودی دانشگاه‌های ترکیه، به صورت جامع و

مطابق با تیپ سوالات مراکز مختلف، در درسنامه آورده شود. قطع به یقین اگر این محتوا را پله‌به‌پله و با نهایت دقتتان طی کنید، توانایی حل عموم سوالات را خواهید داشت.

#### **نکته**

در برخی از بخش‌های درس، قسمتی با عنوان "نکته" به صورت جدا از متن اصلی در یک کادر آورده شده و هدف، تاکید بر محتوا بوده است. این نکات، اغلب از سوالات پرتکرار و یا خاص امتحانات گلچین شده و لازم است تا نهایت دقتتان را برای این مفاهیم داشته باشید.

#### **مطالعه آزاد**

از اسمش مشخص است! این قسمت‌ها، به عنوان مطالبی که تاثیر مستقیم در دانش مورد نیاز شما برای حل سوالات آزمون‌های یوس داشته باشند، در نظر گرفته نمی‌شوند.

#### **یادآوری**

خواهید دید که محتوای این بخش‌ها برایتان آشنا خواهند بود؛ چراکه سال‌های سال است در سیستم آموزشی ایران، این مطالب به وفور تکرار شده‌اند. اما گاهی ممکن است این یادآوری‌ها دارای نکاتی ریز باشند که از ذهنمان گریخته‌اند. همچنین یادآوری‌ها، به عنوان پیش‌نیاز برای فهم متن درس و حل تست‌ها و مثال‌ها نیز قلمداد می‌شوند. لذا توصیه می‌کنیم نگاهی بر یادآوری‌ها داشته باشید اما اگر زمان کافی برای مطالعه‌ی دقیق و جزئی ندارید، می‌توانید آن‌ها را نادیده بگیرید.

\* متن های ستاره دار:

## تیپ خاص سوالات

خصوصیت بارز این مجموعه، همین قسمت است. تیپ‌های تکرار شده اما نایاب و گم‌شده‌ی سوالات را تشکیل می‌دهند که به صورت کاملاً جزئیاتی و دقیق در اختیارتان قرار می‌گیرد. سعی شده است این قسمت از مجموعه، دارای توضیحات مفصل، دقیق و کاربردی باشد. ارزش تیپ خاص سوالات را در آزمون‌های ورودی متوجه خواهید شد! مطالبی بر اهمیت که در کمتر منبعی پیدا می‌کنید.

## سوالات آخر فصل

سوالات متعدد و متنوع از هر تیپ سوالی، در آخر فصل و پس از اتمام درسنامه در قالب سوالات پنج‌گزینه‌ای آورده شده‌اند. کلید این سوالات پس از آخرین سوال پنج‌گزینه‌ای در جدولی قابل مشاهده است.

**موفقیت شما، آرزوی قلبی ماست.**

**تیم مولف ریاضی یوس‌کوئیز**

بعضی اوقات، مطالبی وجود دارند که خارج از حیطه‌ی اختصاصی درس هستند و یا توضیحی اضافی برای جلوگیری از به وجود آمدن شبهه در فهم محتوا به شمار می‌روند. در متن، این مطالب با "\*" مشخص شده‌اند.

مثال

نمونه‌های حل شده از تیپ‌های مشخص و کلی سوالات‌اند. یعنی در ابتدا سعی کرده‌ایم تا منظور درسنامه به صورت واضح در قالب یک مثال آورده شود و قدم به قدم و با یک راه‌حل منطقی و ساده به جواب نهایی رسیده باشیم.

تست تسلط

در داخل متن و در پایان هر مبحث از فصل‌ها، عموماً با چهار تست روبرو می‌شوید (البته تعداد این تست‌ها وابسته به درجه‌ی اهمیت مباحث و تنوع سوالاتشان، ممکن است کم یا زیاد شود). این تست‌ها، غالب تیپ سوالات آزمون‌ها را تشکیل می‌دهند و سطح کمی نسبتاً بیشتری از مثال‌های حل شده را دارند. کلید این تست‌ها در پایان هر فصل و بلافاصله بعد از تست‌های آخر فصل آورده شده است. حتماً در حل این‌گونه تست‌ها، تلاش فراوان نمایید. در ابتدای تست‌های تسلط مربوط به هر کدام از مباحث، تست‌های الگو به عنوان الگوی حل تست‌های تسلط همراه با پاسخ‌های تشریحی مطرح شده‌اند.

نسخه دمو ریاضی



## فهرست جلد اول

- فصل اول - اعداد کسری، اعشاری و متناوب ..... ۳
- فصل دوم - معادله درجه اول ..... ۳۹
- فصل سوم - توان ..... ۶۷
- فصل چهارم - رادیکال ..... ۱۰۱
- فصل پنجم - فاکتورگیری ..... ۱۳۳
- فصل ششم - مینا ..... ۱۵۳
- فصل هفتم - نامساوی و قدرمطلق ..... ۱۶۹
- فصل هشتم - نسبت و تناسب ..... ۱۹۳
- فصل نهم - اعداد ..... ۲۱۳
- فصل دهم - مجموعه ها ..... ۲۳۷
- فصل یازدهم - تابع و توابع خاص ..... ۲۵۹
- فصل دوازدهم - همزهستی و باقیمانده تقسیم ..... ۲۸۹

## BİRİNCİ CİLDİN İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM - KESİRLİ VE DEVİRLİ ONDALIK SAYILAR .....	3
2. BÖLÜM - BİRİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER .....	39
3. BÖLÜM - ÜSLÜ SAYILAR .....	67
4. BÖLÜM - KÖKLÜ SAYILAR .....	101
5. BÖLÜM - ÇARPANLARA AYIRMA .....	133
6. BÖLÜM - TABAN ARİTMETİĞİ .....	153
7. BÖLÜM - MUTLAK DEĞER VE EŞİTSİZLİK .....	169
8. BÖLÜM - ORAN-ORANTI .....	193
9. BÖLÜM - SAYILAR .....	213
10. BÖLÜM - KÜMELER .....	237
11. BÖLÜM - ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR .....	259
12. BÖLÜM - MODÜLER ARİTMETİK .....	289

# فصل اول

اعداد کسری، اعشاری

و متناوب

## 1. BÖLÜM

KESİRLİ VE DEVİRLİ  
ONDALIK SAYILAR

## ۱ - اعداد کسری ، اعشاری و متناوب

### ۱-۱- مجموعه‌های مهم اعداد

شروع این کتاب، از اعداد است. موجودیت رمزآلودی که بانی همه‌ی اتفاقات و اکتشافات دنیای ریاضیات و باقی دنیاهای تأثیرپذیر از ریاضیات هستند.

هر عدد، عضوی از یک یا تعدادی بیشتر از مجموعه‌های زیر است که به ترتیب معرفی خواهند شد:

- ۱- مجموعه اعداد طبیعی
- ۲- مجموعه اعداد حسابی
- ۳- مجموعه اعداد صحیح
- ۴- مجموعه اعداد گویا
- ۵- مجموعه اعداد گنگ
- ۶- مجموعه اعداد حقیقی

### اعداد صحیح:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

### اعداد صحیح مثبت:

$$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

### اعداد صحیح منفی:

$$Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

#### نکته

صفر نه مثبت است و نه منفی.

### اعداد گویا:

هر عددی را که بتوان به صورت کسری نوشت، عددی گویاست.

تعریف ریاضی اعداد گویا به این صورت است:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0, (a, b) = 1 \right\}$$

این تعریف، به صحیح بودن عدد نوشته‌شده در صورت و مخرج کسر مربوط به اعداد گویا اشاره می‌کند. عدد صفر را نیز نمی‌توان به عنوان مخرج یک کسر لحاظ کرد.

هم‌چنین ترم  $(a, b) = 1$  بیانگر این است که  $a$  و  $b$  باید نسبت به هم اول باشند. این بدان معناست که صورت و مخرج، هیچ مقسوم‌علیه مشترکی به جز ۱ نداشته باشند.

برای مثال، هر یک از کسرهای  $\frac{0}{1}$  و  $\frac{3}{3}$  و  $\frac{9}{25}$  گویا هستند.

### اعداد طبیعی:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

### اعداد حسابی:

$$N^+ = I = W = \{1, 2, 3, \dots\}$$

#### نکته

\* دقت کنید که در سؤالات یوس، می‌بایست تعاریف سیستم آموزشی ترکیه را در نظر داشته باشید و تعاریف زیر که مربوط به سیستم آموزش ریاضی در ایران هستند، فاقد کاربردند:

اعداد حسابی:  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

اعداد طبیعی:  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

قسمت اعشاری اعداد گنگ نامتناهی بوده و هیچ وقت تناوبی نمی‌شود.

### برای مثال:

عدد پی ( $\pi$ )، عددی گنگ است؛

این عدد تا بیست رقم اعشار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pi = 3,14159265358979323846$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، ارقام موجود در قسمت اعشاری آن تناوبی نیستند و به صورت نامتناهی در کنار هم چیده شده‌اند. این مقدار، مقدار دقیق عدد پی نیست و صرفاً تا بیست رقم اعشار گزارش شده است.

عدد  $\frac{1}{6} = 0,1666666666$  گویاست؛

این عدد جزو اعداد اعشاری متناوب است که در انتهای فصل بررسی می‌شوند. با توجه به اینکه می‌توان این عدد اعشاری را به صورت کسری نوشت، پس گویاست.

عدد  $\frac{12}{37} = 0,324324324$  گویاست؛

که در آن، عدد سه رقمی ۳۲۴ بی‌نهایت بار در تناوب است.

اعداد  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3}$  و  $e$  (عدد نپِر که در فصل مربوط به لگاریتم و اعداد نمایی معرفی می‌شود)، مثال‌هایی دیگر از اعداد گنگ هستند.

نکات زیر، ارتباط مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح را با اعداد گویا مشخص می‌کند:

✓ هر عدد حسابی، یک عدد گویاست. کافیست عدد یک در مخرج اعداد حسابی قرار بگیرد:

$$W = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots \right\}$$

بنابراین، مجموعه‌ی اعداد حسابی، زیرمجموعه‌ی اعداد گویاست:

$$W \subset Q$$

✓ هر عدد طبیعی، یک عدد گویاست. مانند حالت قبل، عدد ۱ در مخرج این اعداد لحاظ می‌شود:

$$N = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots \right\}$$

بنابراین مجموعه‌ی اعداد طبیعی، زیرمجموعه‌ی اعداد گویاست:

$$N \subset Q$$

✓ هر عدد صحیح، یک عدد گویاست. مخرج این اعداد را ۱ می‌گذاریم:

$$Z = \left\{ \dots, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots \right\}$$

بنابراین مجموعه‌ی اعداد صحیح نیز زیرمجموعه‌ی اعداد گویاست:

$$Z \subset Q$$

### اعداد گنگ:

هر عددی که گویا نباشد، گنگ است؛ یا به عبارت دیگر، هر عددی را که نتوان به شکل  $\frac{p}{q}$  که در آن  $p$  و  $q$  اعداد صحیح هستند، نمایش داد، در زمره‌ی اعداد گنگ خواهد بود.

## ۱-۲- اولویت عملگرهای ریاضی:

در این مبحث، تقدم انجام اعمال را بررسی می‌کنیم. اولویت انجام عملیات ریاضی به ترتیب زیر است:

۱ - محاسبه کروه‌ها و پرانتزها از داخلی‌ترین آن‌ها؛

۲ - توان یا رادیکال؛

۳ - ضرب یا تقسیم (ترتیب انجام عملیات را از چپ به راست در نظر بگیرید)؛

۴ - جمع یا تفریق (به ترتیب از چپ به راست).

مثال

$$19 - 3(9 \times 2 - 2) \div 4 = ?$$

راه حل

$$19 - 3 \times 16 \div 4 = 19 - 48 \div 4 = 19 - 12 = 7$$

مثال

$$1\frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} : \frac{1}{3} - 1 \right) \cdot \frac{5}{7} = ?$$

راه حل

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} : \frac{1}{3} - 1 \right) \cdot \frac{5}{7} &= \frac{4}{3} \left( \frac{2}{3} : \frac{1}{3} - 1 \right) \cdot \frac{5}{7} \\ &= \frac{4}{3} (2 - 1) \cdot \frac{5}{7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{21} \end{aligned}$$

اعداد حقیقی:

حاصل اجتماع مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است که آن را با نماد  $R$  نشان می‌دهند.

$$R = Q \cup Q'$$

پس هرکدام از مجموعه‌های اعداد گویا و گنگ، زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی هستند:

$$Q \subset R, Q' \subset R$$

اعداد اول و مرکب:

اعداد اول، مجموعه‌ای از اعداد طبیعی هستند که هر عضو از آن، مقسوم‌علیه دیگری جز یک و خودش ندارد.

مجموعه‌ی اعداد اول:  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$

اعداد مرکب، هر عدد طبیعی دیگری به جز یک و اعداد اول هستند. با عبارت دیگر، هر عدد طبیعی که بتوان به صورت مضربی از حداقل دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشت، عدد مرکب است. در تجزیه‌ی اعداد به عوامل اول، خواهیم آموخت که همه‌ی اعداد را می‌توان به صورت حاصل ضرب توان‌هایی از اعداد اول نوشت.

نکته

عدد یک، نه اول است و نه مرکب.

نکته

تمامی اعداد اول به جز عدد ۲، فرد هستند؛ ولی هر عدد فردی اول نیست.

مثال

$$\frac{7}{4} - \frac{8}{3} = ?$$

راه حل

$$\frac{7 \times 3 - 8 \times 4}{3 \times 4} = \frac{21 - 32}{12} = -\frac{11}{12}$$

مثال

$$\frac{3}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{5} = ?$$

راه حل

$$\frac{3 \times (3 \times 5) + 8 \times (2 \times 5) - 4 \times (2 \times 3)}{2 \times 3 \times 5} = \frac{45 + 80 - 24}{30} = \frac{101}{30}$$



اما اگر اعداد موجود در مخارج کسرها بزرگ هستند، در صورت استفاده از مفهوم ک.م.م، محاسبات مسئله با دردسر کمتری طی می‌شود.

در حالت کلی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \quad b \neq d$$

$$LCM = [b, d] = k$$

$$k \div b = x, \quad k \div d = y$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{xa + yc}{k}$$

LCM مخفف Least Common Multiple و به معنای

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) است.

## ۱-۳- اعمال ریاضی روی اعداد گویا:

### جمع و تفریق:

در این قسمت، نحوه‌ی انجام عملیات جمع و تفریق روی اعداد کسری بررسی می‌شود. مفهوم **مخرج مشترک** را نیز یادآوری می‌کنیم.

مخرج مشترک، عددی است که به عنوان مخرج کسر نهایی در عملیات مربوط به جمع و تفریق نوشته می‌شود. این عدد، با محاسبه‌ی ک.م.م مخرج‌ها (کوچکترین مخرج مشترک که در فصل‌های آینده، به صورت مفصل بررسی خواهد شد) محاسبه می‌شود.

مخرج کسر نهایی در جمع و تفریق اعداد کسری با مخرج یکسان، برابر با مخرج هریک از کسرهاست. در غیر این صورت و در حالتی که اعداد موجود در مخرج دو کسر، اعدادی کوچک باشند، بدون محاسبه‌ی ک.م.م، اعداد را در هم ضرب می‌کنیم.

در حالت کلی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + c.b}{b.d}$$

مثال

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = ?$$

راه حل

$$\frac{3+6}{5} = \frac{9}{5}$$

## تست تسلط

تست الگو:

$$\frac{3}{28} + \frac{2}{7} - \frac{1}{14} = ?$$

A)  $\frac{1}{14}$    B)  $\frac{3}{7}$    C)  $\frac{4}{7}$    D)  $\frac{9}{28}$    E)  $\frac{3}{14}$

پاسخ تشریحی:

$$\frac{3}{28} + \frac{2}{7} - \frac{1}{14} = \frac{3+2 \times 4 - 1 \times 2}{28} = \frac{9}{28}$$

1.

$$\frac{2}{36} + \frac{1}{6} - \frac{6}{12} + \frac{7}{36} = ?$$

A)  $\frac{3}{36}$    B)  $\frac{-1}{12}$    C)  $\frac{2}{36}$    D)  $\frac{-1}{9}$    E)  $\frac{-1}{9}$

2.

$$\frac{5}{7} + \frac{1}{2} - 1 = ?$$

A)  $\frac{3}{14}$    B)  $\frac{5}{14}$    C)  $\frac{3}{7}$    D)  $\frac{1}{2}$    E)  $\frac{2}{7}$

3.

$$\frac{2}{10} + \frac{1}{6} - \frac{7}{20} = ?$$

A)  $\frac{1}{60}$    B)  $\frac{1}{30}$    C)  $\frac{-1}{30}$    D)  $\frac{1}{15}$    E)  $\frac{-1}{60}$

4.

$$\frac{18}{72} + \frac{16}{64} - \frac{17}{51} = ?$$

A)  $\frac{1}{3}$    B)  $\frac{17}{72}$    C)  $\frac{-1}{3}$    D)  $\frac{2}{3}$    E)  $\frac{1}{6}$

در این بخش، جزئیات مربوط به ک.م.م را دنبال نمی‌کنیم و از روش‌های ذهنی برای اعداد معروف و مشخص استفاده خواهیم کرد. سؤالات پیچیده‌تر در فصل **اعداد** بررسی می‌شوند.

مثال

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{30} = ?$$

راه حل

$$[18, 30] = 90$$

$$90 \div 18 = 5, \quad 90 \div 30 = 3$$

$$\frac{5 \times 5}{90} + \frac{3 \times 7}{90} = \frac{25 + 21}{90} = \frac{46}{90}$$





## یادآوری

فرآیند "دور به دور - نزدیک به نزدیک"، چاره‌ساز بسیاری از سؤالات مرتبط با این مبحث است:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

## نکته

در صورتی که به غیر از عملگرهای ضرب و تقسیم، عملگر دیگری در بین اعداد مسئله وجود نداشته باشد، ترتیب انجام عملیات از چپ به راست خواهد بود. به راه‌حل ارائه‌شده در جواب تست الگو توجه داشته باشید.

## ضرب و تقسیم:

در ضرب و تقسیم اعداد کسری، ابتدا باید کسرها را تا حد امکان ساده‌تر کرد. در حالت کلی داریم:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

در ضرب دو عدد کسری، پس از ساده‌کردن کسرها، صورت‌ها را در هم ضرب کرده و به عنوان صورت کسر نهایی گزارش می‌کنیم. همچنین روند مشابهی در مخرج کسر طی می‌شود.

در تقسیم دو عدد کسری، با معکوس کردن کسر دوم، عملگر تقسیم به عملگر ضرب تبدیل می‌شود.

مجدداً تاکید می‌شود اولین مرحله در حل سؤالات مربوط به عملیات ضرب و تقسیم اعداد کسری، ساده‌کردن کسرهاست.

## نکته

عملگر تقسیم به سه شکل "÷"، "/" و ":" در سؤالات مختلف مشاهده می‌شود.

## مثال

$$\frac{5}{18} \cdot \frac{12}{10} = ?$$

## راه حل

$$\frac{\cancel{5}^1}{1\cancel{8}_2} \cdot \frac{\cancel{12}^2}{\cancel{10}_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{3}$$



### ۱-۴- تبدیل کسرهای نامتعارف (مرکب) به کسرهای عادی:

کسرهای نامتعارف یا مرکب، در شمای کلی  $a\frac{b}{c}$  ظاهر می‌شوند. توجه شود که  $a$  در  $b$  ضرب نمی‌شود. در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$$

در واقع این نوع نمایش از کسرها به منظور تبدیل یک کسر بزرگ‌تر از ۱ به عددی است که شامل هردو قسمت صحیح و اعشاری باشد

در این صورت در عبارت  $a + \frac{b}{c}$ ،  $a$  عدد قبل از ممیز (قسمت صحیح) و  $\frac{b}{c}$  عدد بعد از ممیز (قسمت اعشاری) است ( $\frac{b}{c}$  کوچکتر از ۱ است).

مثال

$$2\frac{3}{5} = ?$$

راه حل

$$\frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow 2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2 + 0,6$$

$$\Rightarrow 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5} = 2,6$$

تلاش کنید تا حالت عکس این سؤال را نیز بررسی کنید. یعنی کسر مرکب عدد  $\frac{13}{5}$  را به دست آورید. پاسخ خود را با پاسخ ارائه‌شده در ادامه ارزیابی کنید.

تست الگو:

$$\frac{2}{3} \times \frac{11}{2} \div \frac{7}{3} = ?$$

A)  $\frac{11}{7}$     B)  $\frac{5}{7}$     C)  $\frac{4}{7}$     D)  $\frac{7}{11}$     E)  $\frac{7}{4}$

پاسخ تشریحی:

$$\frac{2}{3} \times \frac{11}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{11}{3} \div \frac{7}{3} = \frac{11}{7}$$

5.

$$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8} = ?$$

A)  $\frac{3}{2}$     B)  $\frac{2}{3}$     C)  $\frac{1}{2}$     D) 2    E) 1

6.

$$\frac{1024}{600} \div \frac{512}{200} \cdot \frac{1}{2} = ?$$

A)  $\frac{2}{3}$     B)  $\frac{1}{3}$     C) 2    D)  $\frac{1}{2}$     E)  $\frac{512}{500}$

7.

$$7 \cdot \frac{2}{10} + 3 \frac{1}{6} = ?$$

- A)  $\frac{135}{30}$    B)  $\frac{13}{3}$    C)  $\frac{65}{60}$    D)  $\frac{137}{30}$    E)  $\frac{135}{60}$

8.

$$9 - 9 \times 8 \div 4 + 2^2 \times (-1)^5 - 1 = ?$$

- A) 0   B) -14   C) -68   D) -6   E) -13

9.

$$\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{6}{3} + \frac{2}{3} - 1\right)}{\left(\frac{64}{81} \times \frac{9}{8}\right) \div \frac{4}{5}}$$

- A)  $\frac{-57}{40}$    B)  $\frac{-101}{60}$    C)  $\frac{3}{2}$   
D)  $-\frac{57}{80}$    E)  $\frac{103}{60}$

10.

$$\frac{8}{\frac{1024}{16} + 4017 \frac{1}{3} - 4018 \frac{6}{9} + 4019 \frac{6}{18}}$$

- A) 4021   B) 4020   C) 4009   D) 4011   E) 4018

در تقسیم عدد ۱۳ بر ۵، خارج قسمت برابر ۲، باقیمانده برابر ۳ و مقسوم‌علیه برابر ۵ هستند. حال با در نظر گرفتن ساختار موجود در عبارت  $a + \frac{b}{c}$ ، خارج قسمت را جایگزین  $a$  (عدد صحیح)، باقی‌مانده را جایگزین  $b$  و مقسوم‌علیه را جایگزین  $c$  می‌کنیم تا کسر مرکب مربوط به عدد  $\frac{13}{5}$  ساخته شود.



نکته

اگر کسر مرکبی در صورت سؤالات محاسباتی وجود داشته باشد، آن را به معادل کسری متعارف تبدیل کنید.

\* تست‌های تسلط این بخش به صورت ترکیبی با سؤالات مربوط به اولویت عملگرهای ریاضی ارائه می‌شود.

تست تسلط

تست الگو:

$$2 \frac{1}{3} + 3 \frac{2}{7} \div \frac{1}{7} = ?$$

- A)  $\frac{9}{7}$    B)  $\frac{76}{3}$    C)  $\frac{3}{76}$    D)  $\frac{7}{9}$    E)  $\frac{7}{4}$

پاسخ تشریحی:

$$2 \frac{1}{3} + 3 \frac{2}{7} \div \frac{1}{7} = \frac{7}{3} + \frac{23}{7} \div \frac{1}{7} = \frac{7}{3} + 23 = \frac{7+69}{3} = \frac{76}{3}$$

بہتر است شروع کارمان با کسرهای مسلسل مختوم باشد. نقطه‌ی شروع حل این گونه از کسرها، از بیرونی ترین طبقه‌ی صورت و یا مخرج است:

مثال

$$-\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{\frac{2}{5} + \frac{-3}{5 - \frac{1}{2 - \frac{3}{2}}}} = ?$$

راه حل

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{\frac{2}{5} + \frac{-3}{5 - \frac{1}{2 - \frac{3}{2}}}} &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{\frac{2}{5} + \frac{-3}{5 - 2}} \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{\frac{2}{5} + \frac{-3}{3}} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{\frac{2}{5} - 1} \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{\frac{-3}{5}} = -\frac{3}{5} \cdot (-10) = 6 \end{aligned}$$

مثال

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = ?$$

راه حل

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{a-1}{a}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{a-1}{a-1}} \\ &= 1 - \frac{a-1}{-1} = 1 + a - 1 = a \end{aligned}$$

## 1-5- کسرهای مسلسل:

یادآوری

یکی از مهارت‌های موردنیاز برای حل سؤالات مربوط به کسرهای مسلسل، توانایی حل معادلات درجه دوم است. این نوع از معادلات، به دو طریق متداول حل می‌شوند:

1- اگر عبارت  $(x+a)(x+b)$  را بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b) &= x^2 + bx + ax + ab = \\ &= x^2 + (a+b)x + ab \end{aligned}$$

پس اگر حکم مسئله، حل معادله‌ای به شکل کلی  $x^2 + mx + n = 0$  باشد که در آن بتوان  $m$  را حاصل جمع دو عدد  $a$  و  $b$  دانست و هم‌چنین  $n$  را حاصل ضرب آن دو عدد در نظر گرفت، دو جواب این معادله درجه‌ی دوم، برابر  $-a$  و  $-b$  خواهند بود.

2- روش معمول حل معادلات درجه‌ی دومی که در قالب مورد اول نگنجد، به شکل زیر است:

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

در فصل‌های بعد، به بحث مفصل‌تر این نوع از معادلات پرداخته خواهد شد.

با توجه به اینکه تمام اعداد موجود در سؤال مثبت هستند، جواب  $x$  نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین جواب نهایی برابر ۴ خواهد بود.



**نکته**

در مواردی که معادله به صورت  $n + \frac{n+1}{n+1}$  داده شده باشد، حاصل نهایی برابر  $n+1$  است.

**تست تسلط**

تست الگو:

$$2 + \frac{8}{2 + \frac{8}{2 + \frac{8}{2 + \dots}}} = ?$$

- A) 2    B)  $\frac{5}{2}$     C) 3    D)  $\frac{7}{2}$     E) 4

پاسخ تشریحی:

$$2 + \frac{8}{2 + \frac{8}{2 + \frac{8}{2 + \dots}}} = x \Rightarrow 2 + \frac{8}{x} = x$$

$$2x + 8 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 > 0 \\ x = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

اما در کسرهای مسلسل نامختوم، صورت یا مخرج کسر، عدد مشخصی نیست و حاصل جمع و یا تفریق یک سری از کسرهای متناوب در بی‌نهایت مرتبه است. مثلاً:

$$a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \dots}} = x$$

در این حالت با توجه به تکرار سری به تعداد بی‌نهایت، می‌توانیم سری تکرارشونده را مساوی متغیری در نظر بگیریم و معادله‌ای تشکیل دهیم.

**مثال**

$$3 + \frac{4}{3 + \frac{4}{3 + \dots}} = ?$$

**راه حل**

جواب نهایی این معادله را برابر با  $x$  فرض می‌کنیم:

$$3 + \frac{4}{3 + \frac{4}{3 + \dots}} = x$$

با توجه به اینکه قسمت متناوب، بی‌نهایت مرتبه تکرار می‌شود، می‌توان به جای مخرج نیز همان  $x$  را جایگذاری کرد. پس برای کل عبارت می‌توان نوشت:

$$3 + \frac{4}{x} = x$$

$$\frac{x(x)}{x \neq 0} \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \rightarrow x = 4, x = -1$$

14.

$$2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{\dots}}}} = 3 \Rightarrow x = ?$$

- A) 2   B) 1   C) 4   D) 3   E) 6

11.

$$2 + \frac{15}{2 + \frac{15}{2 + \frac{15}{2 + \frac{15}{\dots}}}} = x$$

$$x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = ?$$

- A) 7   B) 3   C) 5   D) 1   E) 2

12.

$$4 + \frac{4 + \frac{4 + \frac{4 + \frac{4 + \frac{4 + \dots}{6}}{6}}{6}}{6}}{6} = ?$$

- A) 4,8   B) 5   C) 4   D) 2,4   E) 1

13.

$$1 + \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \dots}{2}}{2}}{2}}{2} = ?$$

- A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

$$\frac{312}{600} = \frac{104}{200} = \frac{52}{100} = \frac{26}{50} = \frac{13}{25} \xrightarrow[\times(4)]{\times(4)} \frac{312}{600} = \frac{52}{100}$$

پس هدف نهایی در این روش، تبدیل مخرج به اعدادی نظیر 10، 100، 1000، 10000000 و ... است.

مثال

$$\frac{13}{16} = ?$$

راه حل

با استفاده از روش اول:

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 16} \\ \underline{\dots} \\ 0.8125 \\ \underline{\phantom{0}} \\ 0 \end{array}$$



نکته

ضرب و تقسیم این دسته از اعداد اعشاری مانند اعداد صحیح است.

در عملیات ضرب این اعداد، بهتر است ابتدا ممیز را حذف کرده و حاصل ضرب را بیابید و سپس با در نظر گرفتن جمع تعداد ارقام اعشاری اعداد، مکان ممیز را مشخص کنید.

در عملیات تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه را در توانی از 10 ضرب می‌کنیم تا بیش‌ترین تعداد ارقام اعشار بین دو عدد از بین برود. حاصل تقسیم دو عدد به‌دست‌آمده، همان حاصل تقسیم دو عدد اولیه است.

به مثال‌های صفحه‌ی بعد توجه کنید.

## ۱-۶-۱- کسره‌های اعشاری

یک عدد اعشاری، شکلی دیگر از نمایش اعداد است. یعنی هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت عددی اعشاری نمایش داد.

کسره‌های اعشاری، کسرهایی هستند که می‌توان آن‌ها را در قالب یک عدد اعشاری نیز نشان داد. کسره‌های اعشاری، در سه دسته‌ی عمومی زیر قابل بررسی هستند:

### ۱-۶-۱-۱- کسر اعشاری مختوم به صفر:

کسرهایی که در مخرج شکل ساده‌شده‌ی آن‌ها، تنها عوامل 2 یا 5 یا هر دو دیده شود (مخرج، مضربی از 2 یا 5 یا 10 باشد).

به عنوان مثال هر یک از کسره‌های  $\frac{2}{5}$ ،  $\frac{5}{8}$ ،  $\frac{17}{20}$ ،  $\frac{519}{200}$  و  $\frac{7}{2500}$ ، ویژگی ذکرشده را دارا هستند.

دو روش تبدیل این کسرها به عدد اعشاری معادلشان، در ادامه بررسی می‌شود. به یاد داشته باشید که صورت و مخرج کسرها را باید در ابتدا تا حد امکان ساده کرد.

روش اول:

صورت کسر را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

روش دوم:

صورت و مخرج کسر را با هدف تبدیل مخرج به یکی از توان‌های 10، در عددی مناسب ضرب می‌کنیم.

نکته

اعداد اعشاری حاصل از کسرهای مختوم را که تعداد ارقام بعد از ممیز در آنها متناهی است، می توان به راحتی تبدیل به کسر معادلشان کرد. در حالت کلی می توان نوشت:

$$a, b = \frac{ab}{10} \quad ab, cd = \frac{abcd}{100} \quad a, bc... = \frac{abc...}{10^n}$$

توان عدد ۱۰ در مخرج این کسرها، برابر تعداد ارقام اعشاری (تعداد ارقام بعد از ممیز) خواهد بود.

تذکر:

می دانیم که:

$$0,1 = 0,10 = 0,100$$

$$1,23 = 1,230 = 1,2300$$

مثال

$$25,5687 \times 8,45 = ?$$

راه حل

$$255687 \times 845 = 216055515$$

$$\longrightarrow 25.5687 \times 8.45 = 216.055515$$

در این مثال، عدد ۲۵/۵۶۸۷، چهار رقم اعشار و عدد ۸/۴۵، دو رقم اعشار دارد. پس حاصل عملیات ضرب این دو عدد، در قسمت اعشاری خود، دارای شش رقم است.

مثال

$$29,088 \div 12,12 = ?$$

راه حل

$$29,088 \div 12,12 = \frac{29,088}{12,12} \xrightarrow{\frac{\times(1000)}{\times(1000)}} \frac{29,088}{12,12} = \frac{29088}{12120}$$

$$\frac{29088}{1212} = 2,4 \longrightarrow \frac{29,088}{12,12} = 2,4$$



نکته

جمع و تفریق اعداد اعشاری مختوم، مشابه اعداد صحیح است.

مثال

$$1,235 + 0,567 = ?$$

راه حل

$$\begin{array}{r} (1)1 \\ 1,235 \\ + 0,567 \\ \hline 1,802 \end{array}$$





تست تسلط

17.

$$\frac{715}{1250} + \frac{\frac{5}{12}}{\frac{125}{60}} + \frac{7}{250} = ?$$

- A) 0.64 B) 4 C) 3.2 D) 1.6 E) 0.8

18.

$$\frac{0,028}{0,08} \cdot \frac{0,04}{0,004} = ?$$

- A) 3,5 B) 0,35 C) 1,4 D) 14 E) 0,7

تست الگو:

$$\frac{0,0027}{0,03} \div 0,15 \times 0,03 = ?$$

- A) 0,18 B) 0,018 C) 0,015 D) 0,09 E) 0,9

پاسخ تشریحی:

$$\frac{0,0027}{0,03} \div 0,15 \times 0,03 = \frac{0,09}{0,15} \div 0,03 = 0,018$$

15.

$$(27,26 + 2,74) \times 3,3 = ?$$

- A) 9.9 B) 0.99 C) 270 D) 99 E) 2.7

16.

$$\frac{2,56}{0,8} + \frac{0,072}{0,0012} \div \frac{6}{0,6} = ?$$

- A) 38 B) 0,92 C) 6,32 D) 0,382 E) 9,2

### مثال

$$1-5-2-2:3,\overline{15}=?$$

### راه حل

روش اول:

$$3,\overline{15} = 3 + \frac{15}{99} = \frac{104}{33}$$

$$\Rightarrow 1-5-2-2:3,\overline{15} = -4-2:\frac{104}{33} = -4-\frac{66}{104} = -\frac{241}{52}$$

روش دوم:

$$A=3,\overline{15} \Rightarrow 100A = 315,\overline{15}$$

$$100A - A = 315,\overline{15} - 3,\overline{15} \Rightarrow 99A = 312$$

$$\Rightarrow A = \frac{312}{99} = \frac{104}{33}$$

$$\Rightarrow 1-5-2-2:3,\overline{15} = -4-2:\frac{104}{33} = -4-\frac{66}{104} = -\frac{241}{52}$$

در این مثال، عدد دو رقمی ۱۵ به عنوان دوره‌ی گردش عدد اشاری است. به همین خاطر، در  $10^2 = 100$  ضرب شد.



### نکته

اگر رقم در گردش ۹ باشد، با تقریب خوبی معادل رند نزدیک به آن را قرار می‌دهیم:

### مثال

$$7.\overline{49} = 7.5$$

## ۱-۶-۲- کسر اعشاری متناوب ساده:

کسرهایی که پس از ساده‌شدن، در مخرج خود نه عامل ۲ داشته باشند و نه عامل ۵ (مخرج نه مضرب ۲ باشد و نه مضرب ۵). در این شرایط، در خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج، ارقام تکراری ظاهر می‌شود.

به عنوان مثال هر یک از کسرهایی  $\frac{25}{65}, \frac{9}{11}, \frac{1}{3}, \frac{26}{42}, \frac{13}{7}$  این ویژگی را دارا هستند.

$$\frac{14}{21} = \frac{2}{3} = 0,6666... = 0,6\overline{6}$$

تذکر:

علامت ( ) که روی ارقام در قسمت اعشاری عدد دیده می‌شود، نشان‌دهنده‌ی تناوب آن رقم مشخص در خارج قسمت حاصل شده است. به آن دسته از ارقامی که در تناوب هستند، دوره‌ی گردش گفته می‌شود. دوره‌ی گردش در مثال بالا، معادل با عدد ۶ است.

برای تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به کسر معادلش، از قواعد زیر استفاده می‌شود:

روش اول:

$$\text{کسر مورد انتظار} = \frac{\text{دوره گردش}}{\text{به تعداد دوره گردش عدد ۹ می‌نویسیم}} + \text{عدد صحیح}$$

روش دوم:

با این فرض که تعداد ارقام در گردش برابر  $n$  است، عدد اعشاری مورد نظر را در  $10^n$  ضرب می‌کنیم تا اختلاف آن دو عدد را به دست آوریم. به مثال زیر توجه کنید.

تست تسلط

## ۱-۶-۳- کسر اعشاری متناوب مرکب:

چنانچه پس از تجزیه کردن مخرج کسر به عوامل اول، علاوه بر ۲ و ۵، سایر عوامل اول نیز ظاهر شوند، با کسر اعشاری متناوب مرکب مواجه هستیم. در این صورت، در خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج، قبل از ارقام متناوب دوره‌ی گردش، ارقام دیگری نیز ظاهر می‌شوند که در تناوب نیستند. این عدد را عدد اعشاری متناوب مرکب نامند. در واقع در قسمت اعشار این اعداد، شاهد ظهور همزمان ارقام متناوب و غیرمتناوب هستیم؛ مانند کسر  $\frac{3}{14}$  که در مخرج این کسر، علاوه بر عامل ۲، عامل ۷ نیز دیده می‌شود.

$$\frac{3}{14} = 0,21428571$$

در تبدیل اعداد اعشاری متناوب مرکب به کسرهای گویا، می‌توان به این صورت عمل کرد:

اگر  $n$  تعداد ارقام دوره گردش و  $m$  تعداد ارقام دوره غیرگردش باشد:

$$\frac{\text{دوره غیرگردش} - \text{دوره گردش و غیرگردش}}{\text{عدد صحیح}} + \frac{\text{دوره غیرگردش} \times 10^m - \text{دوره گردش}}{10^m - 10^n}$$

در واقع، به تعداد ارقام دوره‌ی گردش، ۹ و به تعداد ارقام دوره‌ی غیرگردش، ۰ در مخرج می‌نویسیم.

تست الگو:

$$7,\overline{29} = ?$$

A)  $\frac{729}{999}$  B)  $\frac{722}{999}$  C)  $\frac{725}{99}$  D)  $\frac{729}{99}$  E)  $\frac{722}{99}$

پاسخ تشریحی:

$$7,\overline{29} = 7 + 0,\overline{29} = 7 + \frac{29}{99} = \frac{722}{99}$$

19.

$$14,\overline{36} = ?$$

A)  $\frac{14}{99}$  B)  $14\frac{4}{11}$  C)  $\frac{11}{155}$  D)  $14\frac{8}{11}$  E)  $\frac{155}{99}$

20.

$$0,245245245\dots = ?$$

A)  $\frac{999}{245}$  B)  $\frac{245}{999}$  C)  $1\frac{245}{999}$  D)  $\frac{82}{333}$  E)  $\frac{333}{81}$

21.

$$37,\overline{783} + 21,\overline{216} = ?$$

A) 58 B) 58,5 C) 59 D) 57 E) 60

22.

$$\frac{6,\overline{6} + 2,\overline{2} + 1,\overline{1}}{3,\overline{3}} = ?$$

A) 3 B) 3,3 C)  $3,\overline{3}$  D) 2 E)  $3,\overline{6}$

تست تسلط

تست الگو:

$$7,5\bar{6} + 2,1\bar{23} = ?$$

A)  $\frac{9653}{990}$  B)  $\frac{9465}{990}$  C)  $\frac{9593}{990}$  D)  $\frac{9632}{990}$  E)  $\frac{9722}{990}$

پاسخ تشریحی:

$$7,5\bar{6} = 7 + 0,5\bar{6} = 7 + \frac{56-5}{90} = 7 + \frac{51}{90}$$

$$2,1\bar{23} = 2 + 0,1\bar{23} = 2 + \frac{123-1}{990} = 2 + \frac{122}{990}$$

$$\Rightarrow 9 + \frac{51}{90} + \frac{122}{990} = 9 + \frac{51 \times 11 + 122}{990} = 9 + \frac{683}{990}$$

$$\Rightarrow \frac{990 \times 9 + 683}{990} = \frac{9593}{990}$$

23.

$$2,5\bar{90} = ?$$

A)  $\frac{22}{57}$  B)  $\frac{27}{11}$  C)  $\frac{57}{22}$  D)  $\frac{11}{27}$  E)  $\frac{2590}{900}$

24.

$$\frac{0,2\bar{6} + 3,2\bar{2}}{1,0\bar{4}} = ?$$

A)  $\frac{315}{94}$  B)  $\frac{47}{157}$  C)  $\frac{157}{47}$  D)  $\frac{314}{90}$  E)  $\frac{157}{900}$

مثال

$$3,41\bar{5} = ?$$

راه حل

روش اول:

$$3,41\bar{5} = 3 + \frac{415-41}{900} = 3 + \frac{374}{900} = \frac{3074}{900}$$

روش دوم:

$$A = 3,41\bar{5} \Rightarrow 100A = 341,5$$

$$\Rightarrow 10(100A) = 3415,5$$

$$1000A - 100A = 3415,5 - 341,5$$

$$\Rightarrow 900A = 3074 \Rightarrow A = \frac{3074}{900}$$

تذکر:

در روش دوم، ابتدا دوره‌ی غیرگردش و سپس دوره‌ی گردش را از ممیز خارج می‌کنیم.



نکته

هریک از اعداد اعشاری مختوم به صفر، متناوب ساده و متناوب مرکب در قالب عدد کسری نوشته شدند. پس این اعداد، گویا هستند. نامتناهی بودن قسمت اعشاری این اعداد، به منزله‌ی گنگ بودن آن‌ها نیست.

### ۱-۷- مقایسه‌ی اعداد گویا:

اساس حل برخی از سؤالات، مقایسه‌ی اعداد گویا از نظر بزرگی و کوچکی آنهاست.

ابتدا به بررسی چند حالت خاص در بررسی اعداد گویا می‌پردازیم:

۱- می‌دانیم که اعداد کسری مثبت بزرگتر از "صفر" اند و "صفر" بزرگتر از اعداد کسری منفی است.

۲- مخرج‌ها برابر باشند: در شرایطی که کسرها مثبت باشند، کسری که دارای کوچک‌ترین مقدار صورت است، از بقیه‌ی کسرها هم‌مخرج خود کوچک‌تر است:

$$\frac{2}{5} < \frac{11}{5} < \frac{13}{5}$$

۳- صورت‌ها برابر باشند: در شرایطی که کسرها مثبت باشند، مقایسه‌ی کسرها برعکس حالت قبل خواهد بود. کسری که دارای کم‌ترین مخرج است، بزرگ‌تر از کسرها دیگر است که صورتشان باهم برابر است:

$$\frac{5}{8} < \frac{5}{7} < \frac{5}{6}$$

۴- اگر اختلاف بین صورت و مخرج بین کسرها یکسان باشد و همگی کسرها مثبت باشند، دو حالت زیر را می‌توان بررسی کرد:

- در صورتی که کسرها کوچک‌تر از یک باشند، کسر دارای صورت بیشتر، مقدار بزرگتری دارد.
- در صورتی که کسرها بزرگ‌تر از یک باشند، کسر دارای صورت کمتر، مقدار بزرگتری دارد.

25.

$$\frac{0,\bar{6} + 0,\bar{2} + 0,\bar{4}}{0,\bar{9} + 0,\bar{3} - 0,\bar{6}} = ?$$

- A) -2    B) 9    C) -9    D) 2    E) 12

26.

$$0,\bar{6} + 0,\bar{21} = ?$$

- A)  $0,\bar{27}$     B)  $0,\bar{87}$     C)  $0,\bar{621}$     D)  $0,\bar{87}$     E)  $0,9$

نکته

اگر مقایسه، مربوط به مقایسه‌ی اعداد اعشاری متناوب با یکدیگر باشد، عموماً تبدیل آنها به کسر معادلشان لازم نیست و مقایسه را می‌توان با توجه به ارقام موجود در قسمت اعشار و صحیح انجام داد:

مثال

$$6,7\bar{8} > 6,78 > 6,779 > 6,\bar{5}$$

تست تسلط

تست الگو:

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{5}{8}, c = \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow ? < ? < ?$$

- A)  $a < b < c$     B)  $a < c < b$     C)  $c < b < a$   
 D)  $c < a < b$     E)  $b < a < c$

پاسخ تشریحی:

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{5}{8}, c = \frac{7}{12}$$

$$a = \frac{72}{120}, b = \frac{75}{120}, c = \frac{70}{120}$$

$$\Rightarrow c < a < b$$

27.

$$a = -\frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5}, c = -\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow ? > ? > ?$$

- A)  $b > a > c$     B)  $a > b > c$     C)  $b > c > a$   
 D)  $c > b > a$     E)  $c > a > b$

$$\frac{31}{26} > \frac{36}{31} > \frac{59}{54}$$

در اثبات این موضوع، می‌توانیم کسرها را به صورت کسره‌ای مرکب نوشته و آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$\Rightarrow 1 + \frac{5}{26} > 1 + \frac{5}{31} > 1 + \frac{5}{54}$$

\* در بررسی کسره‌های کوچک‌تر از یک، به جای عملگر (+)، از عملگر (-) استفاده کنید.

**تذکر:** در سه حالت قبل، اگر کسرها منفی باشند، ابتدا حالت مثبت آن‌ها را مقایسه کرده و سپس علامت (> یا <) را برعکس می‌کنیم.

**طرفین - وسطین به عنوان یک راه حل کلی:**

در این روش، مقایسه‌ی کسرها به صورت دو به دو انجام می‌شود. به این نحو که صورت کسر اول را در مخرج کسر دوم ضرب کرده و عدد حاصل را به عنوان نماینده برای کسر اول در نظر می‌گیریم؛ به همین ترتیب، حاصل ضرب صورت کسر دوم در مخرج کسر اول را به عنوان نماینده برای کسر دوم. در نهایت، آن دو را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

مثال

$$a = \frac{11}{12} \quad b = \frac{5}{6} \quad c = \frac{4}{7}$$

راه حل

طرفین-وسطین را به عنوان راه حل این مثال در نظر می‌گیریم:

$$66 > 60 \Rightarrow a > b$$

$$77 > 48 \Rightarrow a > c$$

$$\Rightarrow a > b > c$$



### تیپ دو:

$$x \in \mathbb{Z}^-, (x) \times (1, 24) \in \mathbb{Z}^-$$

$$\Rightarrow \max(x) = ?$$

راه حل

$$1, 24 = 1 + \frac{24-2}{90} = 1 + \frac{11}{45} \rightarrow \max(x) = -45$$

### تیپ سه:

$$A = \frac{5}{19 \times 23} + \frac{5}{23 \times 27} + \frac{5}{27 \times 31} + \dots + \frac{5}{129 \times 133} = ?$$

راه حل

$$A = \left( \frac{5 \times \frac{4}{5}}{19 \times 23} + \frac{5 \times \frac{4}{5}}{23 \times 27} + \frac{5 \times \frac{4}{5}}{27 \times 31} + \dots + \frac{5 \times \frac{4}{5}}{129 \times 133} \right) \times \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow A = \left( \frac{4}{19 \times 23} + \frac{4}{23 \times 27} + \frac{4}{27 \times 31} + \dots + \frac{4}{129 \times 133} \right) \times \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow A = \left( \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{23} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{129} - \frac{1}{133} \right) \times \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow A = \left( \frac{1}{19} - \frac{1}{133} \right) \times \frac{5}{4} = \left( \frac{7}{133} - \frac{1}{133} \right) \times \frac{5}{4} = \frac{15}{266}$$

### توضیح برای تیپ سه :

این تیپ از سؤالات به کسرهای تلسکوپی معروفاند. اگر در کسر  $\frac{a}{b \times c}$ ، رابطه‌ی  $a = c - b$  برقرار باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{b \times c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

در سؤال قبل، اختلاف دو عدد موجود در مخرج برابر ۴ است؛ درحالی‌که صورت کسرها برابر ۵ تعیین شده است. پس ابتدا صورت را با ضرب در  $\frac{4}{5}$  تبدیل به ۴ کردیم و در نهایت بر این مقدار تقسیم کردیم که در جواب نهایی تاثیر نداشته باشد.

### تیپ خاص سؤالات

\* در این قسمت که در پایان هر فصل مطالعه خواهید کرد، تیپ بندی‌های خاص و پرتکرار سؤالات بررسی می‌شوند. هریک از این تیپ‌های سؤالات، اکثراً در نتیجه‌ی ادغام نکات گفته‌شده در فصل است که در قالب یک یا چند مثال حل‌شده بررسی می‌شوند. سؤالات پنج‌گزینه‌ای مربوط به این بخش در آزمون‌های انتهایی فصل آورده شده است.

### تیپ یک:

$$\frac{11}{5} + \frac{13}{6} + \frac{15}{7} = x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} = ?$$

راه حل

$$2\left(\frac{11}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right) = 4 \quad (1)$$

$$2\left(\frac{13}{6}\right) - \left(\frac{2}{6}\right) = 4 \quad (2)$$

$$2\left(\frac{15}{7}\right) - \left(\frac{3}{7}\right) = 4 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)+(3)} 2\left(\frac{11}{5} + \frac{13}{6} + \frac{15}{7}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7}\right) =$$

$$12 \rightarrow \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} = 2x - 12$$

### توضیح برای تیپ یک :

این سؤال، بازی ریاضی است. عموماً در این نوع سؤال‌ها، بایستی عبارت  $x$  را که داده‌ی مسئله است، در عددی مثبت یا منفی ضرب کرده و سپس با عددی صحیح جمع و یا از آن تفریق کنیم.

در سؤالات پنج‌گزینه‌ای آزمون‌ها که مشابه این سؤال خواهند بود، ایده‌ی حل مسئله را از گزینه‌ها می‌گیریم.



## تیپ چهار:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = ?$$

راه حل

$$A = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

## تیپ پنج:

$$0, a + 0, \overline{a2} = \frac{28}{45}$$

$$\Rightarrow a = ?$$

راه حل

$$0, a + 0, \overline{a2} = \frac{28}{45} \Rightarrow \frac{a}{10} + \frac{\overline{a2} - a}{90} = \frac{28}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{8a + \overline{a2}}{90} = \frac{28}{45} = \frac{56}{90} \Rightarrow 8a + \overline{a2} = 56$$

$$\overline{a2} = 10a + 2 \Rightarrow 8a + 10a + 2 = 56 \Rightarrow 18a + 2 = 56$$

$$\Rightarrow 18a = 54 \Rightarrow a = 3$$

## توضیح برای تیپ پنج:

برای حل این تیپ از سؤالات، باید ابتدا اعداد اعشاری داده شده را با فرمول گفته شده به کسر معادلشان تبدیل کرد و سپس بقیه محاسبات را انجام داد. در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد سه رقمی به شکل  $abc$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$abc = 100a + 10b + c$$

## سؤالات فصل اول (اعداد گویا و اعشاری)

## سؤالات نمونه فصل

1.

$$\frac{3 - \frac{3}{4} - 4}{2 - \frac{3}{4}} = ?$$

- A)  $\frac{1}{8}$     B)  $-3$     C)  $-\frac{4}{3}$     D)  $-20$     E)  $-7$

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ - 2017

2.

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{5} = ?$$

- A) 6,75    B) 7,05    C) 7,35    D) 7,65    E) 7,95

KARABÜK ÜNİVERSİTESİ - 2017

3.

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) = ?$$

- A)  $-1\frac{1}{5}$     B)  $-1\frac{1}{10}$     C)  $1\frac{1}{10}$   
D)  $1\frac{1}{5}$     E)  $1\frac{1}{4}$

T.C. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ - 2013

4.

$$\left(2 + \frac{3}{8}\right) \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = ?$$

- A)  $4\frac{3}{4}$     B)  $4\frac{1}{4}$     C)  $3\frac{1}{3}$   
D)  $3\frac{1}{4}$     E)  $2\frac{1}{3}$

T.C. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ - 2013

5.

$$0,0003 - \frac{0,001}{2} = ?$$

- A) 0,4998    B) 0,4989    C) 0,002  
D)  $-0,002$     E)  $-0,0002$

YILDIZ TEKNI ÜNİVERSİTESİ - 2017

6.

$$\frac{99999999}{9999} + \frac{3333}{33} = ?$$

- A) 10001    B) 10102    C) 10100  
D) 11012    E) 10210

YILDIZ TEKNI ÜNİVERSİTESİ - 2013

7.

$$a=0,\bar{7} \Rightarrow \sqrt{a}=?$$

- A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
 D)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       E)  $\frac{\sqrt{7}}{3}$

19 MAYIS ÜNİVERSİTESİ – 2016

\* توضیحات موجود در پاسخ تشریحی مطالعه شود

8.

$$\frac{\left(2011+\frac{1}{2}\right)-\left(2009-\frac{1}{3}\right)}{\left(2007+\frac{1}{3}\right)-\left(2005-\frac{1}{2}\right)}=?$$

- A) -1    B) 0    C) 1    D) 2    E) 3

19 MAYIS ÜNİVERSİTESİ – 2014

9.

$$a=3,4\bar{5}$$

$$b=(3-a)\frac{5}{41}$$

$$b=?$$

- A)  $-\frac{1}{2}$       B)  $-\frac{1}{18}$       C)  $-\frac{1}{41}$   
 D)  $\frac{1}{18}$       E)  $\frac{1}{12}$

19 MAYIS ÜNİVERSİTESİ – 2018

10.

$$3+2\left[(-5+2)-(-7+3)\right]-4=?$$

- A) 0    B) 1    C) 2    D) 3    E) 4

19 MAYIS ÜNİVERSİTESİ – 2012

11.

$$2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\dots}}}}=?$$

- A) 1    B)  $\frac{3}{2}$     C)  $\frac{1}{2}$     D)  $\frac{5}{3}$     E)  $\frac{4}{3}$

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ – 2012

12.

$$100\frac{1}{4}-200\frac{1}{3}+101\frac{1}{12}=?$$

- A) 1    B) 2    C)  $\frac{7}{3}$     D)  $\frac{5}{2}$     E) 3

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ – 2017

## پاسخ تشریحی سؤالات نمونه فصل

1.

« گزینه E »

$$3 - \frac{3}{4} - 4 = \frac{3.4}{4} - \frac{3}{4} - \frac{4.4}{4} = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$\frac{2 - \frac{3}{4}}{5} = \frac{\frac{2.4}{4} - \frac{3}{4}}{5} = \frac{\frac{-1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

2.

« گزینه D »

$$\frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{15}{2} + \frac{3}{20} = \frac{15.5}{2.5} + \frac{3.5}{20.5} = \frac{75}{10} + \frac{15}{100} = 7.5 + 0.15 = 7.65$$

3.

« گزینه B »

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{3.5 + (2.4 - 1.10) - (3.10 + 1.5)}{20} = \frac{-22}{20} = -\frac{11}{10}$$

$$= -1 - \frac{1}{10} = -1\frac{1}{10}$$

4.

« گزینه A »

$$\left(2 + \frac{3}{8}\right) \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{2.8 + 3}{8}\right) \div \left(\frac{2.2 - 1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{19}{8}\right) \div \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{19}{8} \times (2) = \frac{19}{4} = \frac{4.4 + 3}{4}$$

$$= \frac{4.4}{4} + \frac{3}{4} = 4 + \frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}$$

5.

« گزینه E »

$$0,0003 - \frac{0,001}{2} = 0,0003 - 0,0005 = -0,0002$$

6.

« گزینه B »

$$\frac{99999999}{9999} + \frac{3333}{33} = \frac{9999 \cdot 10000 + 9999}{9999} + \frac{33 \cdot 100 + 33}{33}$$

$$= 10000 + 1 + (100 + 1) = 10102$$

7.

« گزینه E »

$$a = 0,\bar{7} \Rightarrow a = \frac{7}{9} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

\* هنوز مطالب مربوط به رادیکال بحث نشده است. در فصل‌های آینده، این فصل به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

8.

گزینه C <<

$$\frac{\left(2011 + \frac{1}{2}\right) - \left(2009 - \frac{1}{3}\right)}{\left(2007 + \frac{1}{3}\right) - \left(2005 - \frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{(2011 - 2009) + \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{(2007 - 2005) + \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)} =$$

$$\frac{2 + \frac{3+2}{6}}{2 + \frac{2+3}{6}} = 1$$

9.

گزینه B <<

$$a = 3,4\bar{5} = 3 + \frac{45-4}{90} = 3 + \frac{41}{90}$$

$$b = (3-a) \cdot \frac{5}{41} \Rightarrow b = \frac{-41}{90} \cdot \frac{5}{41}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{5}{90} = -\frac{1}{18}$$

10.

گزینه B <<

11.

گزینه A <<

$$2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots}}} = X$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{X} = X \xrightarrow{\times(X)} 2X - 1 = X^2$$

$$\Rightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Rightarrow (X-1)^2 = 0 \Rightarrow X = 1$$

12.

گزینه A <<

$$100 \frac{1}{4} - 200 \frac{1}{3} + 101 \frac{1}{12} =$$

$$(100 - 200 + 101) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) =$$

$$1 + \frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 + 1}{12} = 1$$

سوالات آخر فصل اول

1.

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{6} = ?$$

- A) 1      B)  $\frac{7}{6}$       C)  $\frac{4}{3}$       D)  $\frac{3}{2}$       E)  $\frac{5}{3}$

2.

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = ?$$

- A)  $-\frac{1}{20}$       B)  $-\frac{1}{10}$       C) 0  
D)  $\frac{1}{10}$       E)  $\frac{1}{5}$

3.

$$a + \frac{2}{b} = \frac{17}{5} \Rightarrow a + b = ?$$

- A) 5      B) 2      C) 3      D) 4      E) 8

4.

$$243\frac{15}{11} - 241\frac{4}{11} = ?$$

- A)  $\frac{18}{11}$       B) 2      C) 3      D)  $\frac{32}{11}$       E)  $\frac{35}{11}$

5.

$$\left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = ?$$

- A)  $-\frac{3}{5}$       B)  $-\frac{4}{5}$       C) -1  
D)  $-\frac{6}{5}$       E)  $-\frac{7}{5}$

6.

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right)$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right)$$

$$\rightarrow A \cdot B = ?$$

- A) 1      B)  $\frac{9}{8}$       C)  $\frac{8}{7}$   
D)  $\frac{15}{7}$       E) 3

7.

$$\frac{1}{2} : 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$$

- A)  $-\frac{1}{5}$       B)  $-\frac{1}{6}$       C) 0      D)  $\frac{1}{6}$       E)  $\frac{1}{3}$

8.

$$13: \left( \frac{2}{\frac{4}{5}} + \frac{\frac{9}{2}}{6} \right) = ?$$

- A)  $\frac{13}{2}$     B) 4    C)  $\frac{13}{5}$     D) [2    E)  $\frac{13}{7}$

9.

$$a = \frac{5}{7}, b = \frac{5}{8}, c = \frac{5}{9} \Rightarrow ? < ? < ?$$

- A)  $a < b < c$                       B)  $a < c < b$   
 C)  $b < a < c$                       D)  $b < c < a$   
 E)  $c < b < a$

10.

$$a = \frac{3}{10}, b = \frac{13}{100}, c = \frac{153}{1000} \Rightarrow ? > ? > ?$$

- A)  $b > c > a$                       B)  $c > a > b$   
 C)  $c > b > a$                       D)  $a > b > c$   
 E)  $a > c > b$

11.

Hangısı  $\frac{2}{5}$  ve  $\frac{7}{5}$  arasındadır?

Which one is between the numbers  $\frac{2}{5}$  and  $\frac{7}{5}$ ?

- A)  $\frac{1}{5}$     B)  $\frac{1}{3}$     C)  $\frac{8}{10}$     D)  $\frac{16}{10}$     E)  $\frac{27}{15}$

12.

$$A = \frac{7}{9} + \frac{12}{19} \Rightarrow \frac{11}{9} + \frac{7}{19} = ?$$

- A)  $A-3$     B)  $A-2$     C)  $3-A$     D)  $2-A$     E)  $1-A$

13.

$$a = \frac{29}{27}, b = \frac{15}{13}, c = \frac{53}{51} \Rightarrow ? > ? > ?$$

- A)  $b > c > a$                       B)  $b > a > c$   
 C)  $a > b > c$                       D)  $c > b > a$   
 E)  $a > c > b$

14.

$$a = \frac{1}{9}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{1}{8} \Rightarrow ? < ? < ?$$

- A)  $b < c < a$       B)  $c < a < b$   
 C)  $a < c < b$       D)  $c < b < a$   
 E)  $a < b < c$

15.

$$1 + \frac{6}{1 + \frac{6}{1 + \frac{6}{\ddots}}} = ?$$

- A) 2      B) 3      C) 5      D) 6      E) 7

16.

$$A = \frac{3}{7} + \frac{9}{17} + \frac{5}{24} \Rightarrow \frac{4}{7} + \frac{8}{17} + \frac{19}{24} = ?$$

- A)  $A-3$       B)  $3-3A$       C)  $3A-1$       D)  $A+3$       E)  $3-A$

17.

$$\frac{3,14 + 4,86}{0,4} = ?$$

- A) 10      B) 15      C) 20      D) 30      E) 40

18.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1,2\bar{9} \\ y = 0,2\bar{9} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = ?$$

- A) 2,2      B) 1,6      C) 1,2      D) 0,6      E) 0,4

19.

$$\frac{0,7\bar{7} - 0,5\bar{5} + 0,4\bar{4}}{0,3\bar{3} + 0,6\bar{6} - 0,7\bar{7}} = ?$$

- A) 2      B) 3      C) 5      D) 7      E) 10

20.

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{50}\right)}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{25} \Rightarrow a = ?$$

- A) 4      B) 3      C) 2      D) 1      E) -1

21.

$$\frac{12}{13} + \frac{13}{14} + \frac{14}{15} = M \Rightarrow \frac{25}{26} + \frac{27}{28} + \frac{29}{30} = ?$$

- A)  $\frac{M}{2}$       B)  $2M+1$       C)  $\frac{M+3}{2}$       D)  $\frac{M-1}{2}$       E)  $\frac{3M}{2}$



22.

$$\frac{1}{4} \left( \frac{4}{11} - \frac{1}{33} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{33}{11} - \frac{1}{4} \right) = ?$$

- A) 0      B)  $\frac{2}{11}$       C)  $\frac{4}{11}$       D) 1      E) 3

23.

$$\left. \begin{aligned} a &= -3,175\overline{2} \\ b &= -3,175\overline{2} \\ c &= -3,175\overline{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow ? > ? > ?$$

- A)  $a > b > c$       B)  $a > c > b$       C)  $c > a > b$   
D)  $b > c > a$       E)  $c > b > a$

24.

$$\frac{135,7}{1,357} + \frac{0,1357}{0,001357} = ?$$

- A) 200      B) 300      C) 400      D) 500      E) 600

25.

$$\frac{221\frac{111}{123} - 201\frac{37}{41}}{18\frac{47}{58} - 3\frac{141}{174}} = ?$$

- A) 0      B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{2}{3}$       D)  $\frac{4}{3}$       E)  $\frac{5}{3}$

26.

$$4 + \frac{5}{4 + \frac{5}{4 + \frac{5}{\ddots}}} : 2 - \frac{2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{\ddots}}}}{3} = ?$$

- A)  $\frac{3}{5}$       B)  $\frac{8}{5}$       C) 3      D)  $\frac{7}{2}$       E)  $\frac{3}{2}$

27.

$$\frac{1}{13 \times 14} + \frac{1}{14 \times 15} + \frac{1}{15 \times 16} + \dots + \frac{1}{64 \times 65} = ?$$

- A) 0      B)  $\frac{4}{65}$       C)  $\frac{1}{13}$       D)  $\frac{1}{64}$       E)  $\frac{1}{40}$

28.

$$0,\overline{5} + 0,0\overline{5} + 0,00\overline{5} + \dots + 0,\underbrace{0\dots 0}_n \overline{5} = \frac{555555}{9000000} \Rightarrow n = ?$$

- A) 5      B) 6      C) 7      D) 8      E) 9

29.

$$\frac{2007\frac{8}{15} - 2001\frac{2}{15}}{5\frac{1}{3} - 3\frac{1}{5}} = ?$$

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

30.

$$\left. \begin{aligned} a &= 27,8413 \\ b &= 35,0234 \\ c &= 8,1352 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b + c = ?$$

- A) 60    B) 61    C) 71    D) 72    E) 73

31.

$$1 - \frac{1 - \frac{x}{2}}{2} = 1$$

- A) 3    B) 1    C) 0    D) -1    E) -2

32.

$$\frac{5,1}{0,017} + \frac{0,09}{0,003} + \frac{1}{0,1} = ?$$

- A) 610    B) 601    C) 340  
D) 331    E) 304

33.

$$0,5\overline{16} = ?$$

- A)  $\frac{511}{999}$     B)  $\frac{516}{990}$     C)  $\frac{516}{900}$   
D)  $\frac{516}{999}$     E)  $\frac{511}{990}$

34.

$$a = \frac{10}{11} \quad b = \frac{100}{111} \quad c = \frac{1000}{1111}$$

$$\Rightarrow ? < ? < ?$$

- A)  $c < b < a$     B)  $c < a < b$     C)  $a < b < c$   
D)  $a < c < b$     E)  $b < c < a$

35.

$$a = \frac{11}{10} \quad b = \frac{101}{100} \quad c = \frac{1001}{1000}$$

$$\Rightarrow ? > ? > ?$$

- A)  $c > a > b$     B)  $b > a > c$     C)  $b > a > c$   
D)  $c > b > a$     E)  $a > b > c$

36.

$$\left. \begin{aligned} a, b, c, d \in R \\ a < 0 < b < c < d \end{aligned} \right\}$$

Which one is negative?  
Hangisi negative dir?

- A)  $a \cdot (b - d)$     B)  $(d - c) \cdot (b - a)$     C)  $(a - b) \cdot (a - d)$   
D)  $b + c + d - a$     E)  $a \cdot b + a$

37.

$$\left\{ \begin{aligned} a, b, c \in Z^- \\ 12 \cdot a \cdot b = 30 \cdot b \cdot c = 18 \cdot a \cdot c \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \max(a + b + c) = ?$$

- A) -5    B) -7    C) -10    D) -12    E) -15

38.

$$4 + 6 : 2 - 4 \cdot 3 + 1 = ?$$

- A) -4      B) -3      C) -1      D) 3      E) 4

39.

$$x \neq 3$$

$$L, \Rightarrow \frac{x - 3(x - 2)}{x - 3} = ?$$

- A)
- $x - 1$
- B)
- $x - 2$
- C)
- $x + 1$
- 
- D) 2      E) -2

40.

$$\underbrace{\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \dots + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}}_{21 \text{ digits}} = ?$$

- A)
- $\frac{11}{6}$
- B)
- $\frac{19}{6}$
- C)
- $\frac{25}{6}$
- D)
- $\frac{5}{3}$
- E)
- $\frac{7}{3}$

41.

$$4 - \frac{4}{4 - \frac{4}{4 - \frac{4}{\ddots}}}$$

- A) 7      B) 5      C) 4      D) 3      E) 2

42.

$$1 - \frac{2 - \frac{2 - \frac{2 - \frac{\dots}{3}}{3}}{3}}{4} = ?$$

- A)
- $\frac{5}{8}$
- B)
- $\frac{3}{8}$
- C)
- $\frac{1}{4}$
- D)
- $\frac{3}{2}$
- E)
- $\frac{5}{2}$

43.

$$x \in \mathbb{N}^+$$

$$\frac{2}{5} < \frac{6}{x} < \frac{9}{7} \Rightarrow n(\text{S.S.}) = ?$$

- A) 10      B) 11      C) 12
- 
- D) 13      E) 14

44.

$$0,03 + 0,0003 + 0,000003 + 0,00000003 + \dots = ?$$

- A)
- $\frac{1}{3}$
- B)
- $\frac{1}{33}$
- C)
- $\frac{1}{30}$
- D)
- $\frac{10}{33}$
- E)
- $\frac{31}{99}$

45.

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{0,5}{0,3}} = ?$$

- A) -3      B) -1      C) 1      D) 2      E) 3

46.

$$a=1,\overline{234} \quad b=1,\overline{23\overline{4}} \quad c=1,\overline{23\overline{4}}$$

$$\Rightarrow ? < ? < ?$$

- A)  $a < b < c$       B)  $a < c < b$       C)  $b < a < c$   
 D)  $b < c < a$       E)  $c < b < a$

49.

$$\left. \begin{array}{l} x, y, z \in R \\ y > 0 \\ x - y > z \end{array} \right\} \Rightarrow \text{which one is correct?}$$

- A)  $x > z$       B)  $x > y$       C)  $z > y$   
 D)  $x > 0$       E)  $z > 0$

47.

$$0,\overline{a} + 0,a = 1,9$$

$$\Rightarrow 0,a + 0,0a + 0,00a + \dots = ?$$

- A) 1      B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{1}{4}$   
 D)  $\frac{1}{8}$       E)  $\frac{3}{2}$

50.

$$\frac{5\left(2 - \frac{3}{5}\right)}{2\left(3 - \frac{5}{2}\right)} = ?$$

- A)  $\frac{5}{2}$       B) 4      C) 3      D) 5      E) 7

48.

$$12 + 30 \cdot [(6 + 4, 2 - 8 : (-2)) - 14] = ?$$

- A) 21      B) 17      C) 15      D) 12      E) 18

## کلید سؤالات نمونه فصل اول

1	2	3	4	5	6
E	D	B	A	E	B
7	8	9	10	11	12
E	C	B	B	A	A

## کلید سؤالات تست تسلط اول

1	2	3	4	5	6
B	A	A	E	C	B
7	8	9	10	11	12
D	B	A	B	C	A
13	14	15	16	17	18
B	D	D	E	E	A
19	20	21	22	23	24
B	B	C	A	C	C
25	26	27	28	29	30
D	B	A	B	A	E

## کلید سؤالات آخر فصل اول

1	2	3	4	5	6
A	C	E	C	A	A
7	8	9	10	11	12
C	B	E	E	C	C
13	14	15	16	17	18
B	C	B	E	C	B
19	20	21	22	23	24
B	C	C	D	E	A
25	26	27	28	29	30
D	D	B	B	C	C
31	32	33	34	35	36
E	C	E	A	E	E
37	38	39	40	41	42
A	A	E	B	E	A
43	44	45	46	47	48
A	B	E	A	A	E
49	50				
A	E				

# فصل دوم

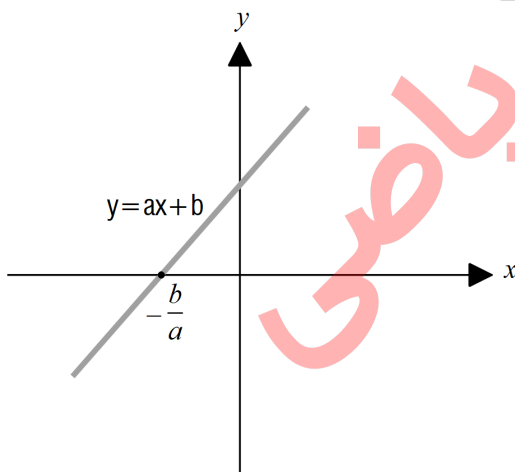
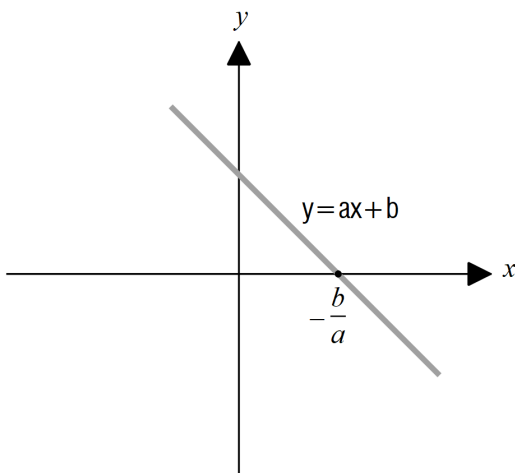
معادله درجه اول

## 2. BÖLÜM

BİRİNCİ DERECE DENKLEMLER

مبدأ خط نامیده می‌شود. هم‌چنین کسر  $-\frac{b}{a}$  را طول از مبدأ خط می‌نامیم. توضیحات بیشتر در این مورد، در ادامه آورده شده است.

خط  $y = ax + b$  در صفحه‌ی  $y-x$ ، به این صورت رسم می‌شود:



## ۲- معادله درجه اول

### معرفی معادله:

عبارت جبری شامل یک یا چند عدد، متغیر و عملگرهایی نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است. برای مثال هر یک از عبارت‌های  $5x$ ،  $3+r$  و  $4-\frac{x}{y}$  عبارت‌های جبری هستند. معادله از یک تساوی که در دو سوی آن عبارت جبری باشد، تشکیل می‌شود و می‌تواند یک یا چند جواب (ریشه) داشته باشد. برای مثال هر یک از تساوی‌های  $2+\frac{x}{y}=1$  و  $3x+1=5z$  عبارت‌های جبری هستند.

مثلاً در معادله‌ی زیر، عدد ۲، تنها ریشه‌ی معادله است.

$$x + 2 = x \times 2 \rightarrow x = 2$$

### معادلات درجه‌ی اول:

معادله‌ای را که در آن بیش‌ترین توان متغیر یک باشد، معادله‌ی درجه اول می‌نامند. این معادلات به فرم کلی  $y = ax + b$  نوشته می‌شوند.  $x$  در این معادله، حکم مجهول مسئله را داراست و به ازای هر  $y$ ، تنها یک  $x$  در معادله صدق می‌کند.

### ۱-۲- شیب و عرض از مبدا

نمودار مربوط به هر معادله‌ی درجه اول (که به آن معادله‌ی خط نیز گفته می‌شود)، خط راست شیب‌داری است که محور  $x$ ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

همان‌طور که گفته شد، معادله درجه‌ی اول به فرم  $y = ax + b$  نوشته می‌شود که  $a$  شیب خط،  $b$  عرض از

نکته

جواب معادله درجه اول در سه حالت قابل بررسی است:

✓  $a \neq 0$  باشد: در این صورت، معادله دارای

تنها یک جواب است.

✓  $a = 0$  و  $b \neq 0$  باشد: معادله، غیرممکن یا

نشدنی است.

$$0 \times x = 4 \Rightarrow 0 = 7$$

✓  $a = 0$  و  $b = 0$  باشد: معادله مبهم است و

بی‌نهایت جواب دارد. ( $x \in R$ )

نکته

قانون طرفین-وسطین، چاره‌ساز حل بسیاری از

معادلات است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = c.b$$

نکته

دو معادله‌ی درجه اول تنها در صورتی با هم برابرند که

ضرایب آن‌ها باهم برابر باشند:

$$a, b, m, n \in R$$

$$ax + b = mx + n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = m \\ b = n \end{cases}$$

اگر خط صعودی باشد،  $a$  مثبت و اگر نزولی باشد،  $a$  منفی است. همانطور که پیش‌تر نیز گفته شد،  $a$  همان شیب خط است.

محل برخورد نمودار با محور طول‌ها زمانی اتفای می‌افتد که  $y$  برابر صفر باشد. بنابراین:

$$y = 0 \rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

اگر محل برخورد خط با محور  $x$  در سمت راست محور  $y$  باشد،  $-\frac{b}{a}$  مثبت و اگر در سمت چپ محور  $y$  باشد،  $-\frac{b}{a}$  منفی است. این عبارت را طول از مبدأ نمودار می‌نامیم.

هم‌چنین، در محل برخورد نمودار با محور  $y$ ،  $x = 0$  است:

$$x = 0 \rightarrow a \times (0) + b = y \Rightarrow y = b$$

پس  $b$  همان نقطه‌ی برخورد خط به محور  $y$  است که عرض از مبدأ خط نامیده می‌شود.

در مثال زیر، مقادیر شیب، طول از مبدأ و عرض از مبدأ را به ترتیب محاسبه می‌کنیم:

مثال

$$5y = -x + 1 + 6x + 6$$

$$5y = 5x + 7$$

$$\Rightarrow y = x + \frac{7}{5} \rightarrow a = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = b = \frac{7}{5}$$





3.

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{15}x$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{5}{3}$     B) 0.6    C) 6    D)  $\frac{4}{3}$     E)  $\frac{3}{4}$

**تذکر:** مجموعه جواب‌های یک معادله با عبارت S.S. نمایش داده می‌شود که مخفف "Solution Set" است.

تست تسلط

تست الگو:

$$2x + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) 2.5    B) -2.5    C) 0    D) 5    E) -5

پاسخ تشریحی:

$$2x + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -2.5$$

1.

$$9x + 5 = 9x + 5$$

$$\Rightarrow \text{S.S.} = ?$$

- A)  $\left\{\frac{9}{5}\right\}$     B)  $\left\{\frac{5}{9}\right\}$     C)  $\{1\}$     D)  $\left\{-\frac{9}{5}\right\}$     E)  $R$

2.

$$3x - 32 + 2(3x + 5) = 32$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $-\frac{10}{9}$     B) 9    C) 6    D)  $\frac{50}{9}$     E) 5

مثال

$$\frac{1}{2}x - \frac{x}{3} + \frac{4}{5} - 2 = \frac{3}{5}x - 1$$

$$\Rightarrow x = ?$$

راه حل

$$\frac{1}{2}x - \frac{x}{3} + \frac{4}{5} - 2 = \frac{3}{5}x - 1 \xrightarrow{\times(30)} 15x - 10x + 24 - 60 = 18x - 30$$

$$\Rightarrow -13x = 6 \Rightarrow x = \frac{-6}{13}$$



۲- معادلاتی که مخارج کسره‌ایشان، شامل متغیر هستند: در این صورت، می‌بایست جواب‌های درست و نادرست را از میان تمام جواب‌های به‌دست‌آمده تشخیص دهیم. **مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند، مورد قبول نیستند.**

مثال

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{x} = \frac{b+x}{x}, \quad b \neq 0$$

$$\Rightarrow x = ?$$

راه حل

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{x} = \frac{b+x}{x} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b+x}{x} - \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b-a+x}{x} \Rightarrow ax = b^2 - ab + bx$$

$$\Rightarrow ax - bx = b^2 - ab \Rightarrow x(a-b) = b(b-a)$$

$$\Rightarrow x = b \frac{(b-a)}{(a-b)} = -b$$



## ۲-۲- معادلات کسری

یادآوری

تعدادی از اتحادهای معروف که پیش‌نیاز حل مسائلی از این فصل هستند، عبارت‌اند از:

- A)  $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
- B)  $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
- C)  $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

همانطور که می‌دانید، اتحادهای  $A$  و  $B$  به اتحادهای مربع دو جمله‌ای و اتحاد  $C$ ، به اتحاد مزدوج معروف هستند.

معادلات کسری در دو دسته‌ی زیر بررسی می‌شوند:

۱- معادلاتی که هیچ‌کدام از مخارج کسره‌ایشان دارای متغیر نیستند: در این صورت برای ساده‌تر شدن محاسبات بهتر است کل معادله را در  $k.m.m$  مخرج‌ها ضرب کنیم تا با اعدادی صحیح سروکار داشته باشیم.

**تذکر:** توجه داشته باشید که با ضرب عددی مخالف صفر در تمامی جملات یک معادله، تغییری در جواب نهایی معادله ایجاد نمی‌شود.

### ۲-۳- دو معادله دو مجهولی

گاهی اوقات با مسائلی مواجه می‌شویم که بیش از یک معادله و یک مجهول دارند. این گروه معادلاتی را که وابسته به یکدیگر هستند و برای یافتن مجهولاتشان، باید همزمان از تمام معادلات استفاده شود، با استفاده از دستگاه معادلات حل می‌کنیم.

#### نکته

دستگاه‌های معادلاتی تنها زمانی قابل حل هستند که تعداد معادلات و تعداد مجهولاتشان باهم برابر باشد. پس می‌توان گفت یک معادله‌ی یک مجهولی، دستگاه‌های دو معادله‌ی دو مجهولی، سه معادله‌ی سه مجهولی و به همین ترتیب  $n$  معادله‌ی  $n$  مجهولی قابل حل هستند. به عبارت دیگر، برای پیدا کردن هر مجهول، وجود یک معادله‌ی مستقل، لازم و کافی است.

برای حل دو معادله‌ی دو مجهولی، سه دسته روش کلی به شرح زیر توضیح داده می‌شود:

۱- از روش حذف استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که ضریب یکی از مجهول‌ها را در یکی از معادلات به نحوی تغییر می‌دهیم که در نهایت در جمع با معادله دوم، حذف شود و تنها یک مجهول باقی بماند.

تست الگو:

$$\frac{a}{x} + c = \frac{a(b+c)}{bx}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

A)  $\frac{a}{b}$     B)  $\frac{a}{c}$     C) a    D) b    E) c

پاسخ تشریحی:

$$\frac{a}{x} + c = \frac{a(b+c)}{bx}$$

$$\Rightarrow x \left( \frac{a}{x} + c \right) = \frac{x \cdot a(b+c)}{bx}$$

$$\Rightarrow a + cx = \frac{a(b+c)}{b} \Rightarrow cx = \frac{a(b+c)}{b} - a$$

$$\Rightarrow cx = \frac{ab + ac - ab}{b} \Rightarrow cx = \frac{ac}{b}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{b}$$

4.

$$\frac{22x+8}{5,5x+2} + \frac{10-4x}{2x+3} = 0$$

$$\Rightarrow x = ?$$

A)  $-\frac{4}{11}$     B)  $\frac{11}{4}$     C)  $-\frac{11}{4}$     D)  $\frac{11}{2}$     E)  $-\frac{11}{2}$

5.

$$\frac{2x-5}{15} - \frac{6x+2}{20} = x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

A)  $\frac{2}{35}$     B) 35    C)  $\frac{70}{4}$     D)  $-\frac{4}{70}$     E)  $\frac{35}{2}$

مثال

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 2 & (A) \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 11 & (B) \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y = ?$

راه حل

$$n = \frac{1}{x}, \quad m = \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow (A) \Rightarrow 5n + 4m = 2$$

$$\rightarrow (B) \Rightarrow 3n - 2m = 11$$

$$\rightarrow n = \frac{24}{11} \Rightarrow x = \frac{11}{24}$$

$$\rightarrow m = -\frac{49}{22} \Rightarrow y = -\frac{22}{49}$$



نکته

در حل دستگاه سه معادله سه مجهولی، ابتدا با استفاده از دو معادله، یکی از متغیرها را از بین می‌بریم. در نتیجه، آن دو معادله به یک معادله واحد تبدیل می‌شوند. سپس دستگاه معادله جدید و معادله سوم را تشکیل می‌دهیم. این دستگاه، دستگاه دو معادله دو مجهولی خواهد بود.

مثال

$$\begin{cases} x - 3y = 5 & (A) \\ 2x + y = 3 & (B) \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y = ?$

راه حل

$$(A) \rightarrow x - 3y = 5$$

$$(B) \xrightarrow{\times(3)} 3 \times 2x + 3 \times y = 3 \times 3 \rightarrow 6x + 3y = 9$$

$$7x = 14 \rightarrow x = 2$$

$$2 - 3y = 5 \rightarrow y = -1$$



۲- یکی از متغیرها را از یکی از معادلات انتخاب می‌کنیم و رابطه‌ی آن را نسبت به متغیر دیگر به دست می‌آوریم و در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم.

مثال

$$\begin{cases} x - 3y = 5 & (A) \\ 2x + y = 3 & (B) \end{cases}$$

$\Rightarrow x, y = ?$

راه حل

$$(A) \rightarrow x = 3y + 5$$

$$(B) \xrightarrow{(A)} 2(3y + 5) + y = 3 \rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = -1$$

$$(A) \rightarrow x = 3(-1) + 5 \Rightarrow x = 2$$



۳- هرگاه در دستگاه معادلات خطی، مجهول مورد نظر در مخرج کسر باشد، می‌توان از روش تغییر متغیر استفاده کرد.

8.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = ?$$

- A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

9.

$$\begin{cases} 3a - b + 5c = 7 \\ 5a + 6c = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a + b + c = ?$$

- A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

تست الگو:

$$\begin{cases} x - y = 22 \\ y + z = 10 \\ z - v = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - 2y - 2z + v = ?$$

- A)4 B)6 C)9 D)12 E)18

پاسخ تشریحی:

$$\begin{array}{r} x - y = 22 \\ \times(-1) \quad y + z = 10 \\ \times(-1) \quad z - v = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} x - y = 22 \\ -y - z = -10 \\ + \quad -z + v = -8 \\ \hline x - 2y - 2z + v = 4 \end{array}$$

6.

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -17 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{S.S.} = ?$$

- A)  $\{\frac{1}{3}, 4\}$  B)  $\{(-3, -4)\}$  C)  $\{(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4})\}$   
D)  $\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})\}$  E)  $\{(3, 4)\}$

7.

$$\begin{cases} \frac{2}{3a+3} + \frac{4}{b+1} = 2 \\ \frac{3}{a+1} - \frac{5}{b+1} = \frac{19}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = ?$$

- A)-47 B)-45 C)-36 D)47 E)45

۳) اگر  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ : یک جواب داریم.

$$n(S.S.) = 1$$

یعنی دو خط فقط در یک نقطه متقاطع هستند.

نکته

اگر یکی از حالت‌های ۲ یا ۳ رخ دهد، می‌گوییم معادلات مستقل هستند. در حال ۱، می‌گوییم معادلات وابسته هستند.

نکته

جواب دستگاه چند معادله چند مجهول، همان نقاط برخورد خطوط مربوط به معادلات است.

تست تسلط

تست الگو:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ mx + 2y = 10 \end{cases}, \quad n(S.S.) = 0$$

$$\Rightarrow m = ?$$

A) -2    B) -1    C) 0    D) 1    E) 2

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ kx + py = r \end{cases}$$

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{p} \neq \frac{c}{r} \Rightarrow S.S = \emptyset$$

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{p} = \frac{c}{r} \Rightarrow S.S = R$$

$$\frac{2}{m} = -\frac{4}{2} \neq \frac{5}{10} \Rightarrow m = -1$$

## ۲-۴- بحث در مورد جواب‌های دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی

**تذکر:** با توجه به اینکه مجموعه جواب‌های یک معادله را با عبارت  $S.S.$  نمایش دادیم، تعداد اعضای این مجموعه را نیز با عبارت  $n(S.S.)$  یا  $s(S.S.)$  مشخص می‌کنیم. به عبارت دیگر،  $n(S.S.)$  همان تعداد جواب‌های یک معادله یا یک دستگاه معادلات است. پس وقتی مثلاً  $n(S.S.) = 0$  باشد، یعنی معادله جواب ندارد و یا وقتی  $n(S.S.) = 1$  باشد، یعنی معادله یک جواب دارد.

با در نظر گرفتن اینکه فرم کلی دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی به صورت  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  است، سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ : دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

$$n(S.S.) = \infty$$

در حقیقت دو معادله یکی هستند و یک معادله‌ی دو مجهولی داریم. در صورت رسم هر کدام از خط‌ها، متوجه می‌شویم که روی یکدیگر منطبق‌اند.

۲) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ : دستگاه معادلات، جواب ندارد.

$$n(S.S.) = 0$$

چون ضرایب مجهولات دو معادله یکی است اما حاصل جمع شان یکی نیست و در نتیجه دو خط موازی‌اند و همدیگر را هیچ‌وقت قطع نمی‌کنند.

## ۲-۵- عدم همخوانی تعداد مجهولات با

### تعداد معادلات

در صورتی که تعداد مجهولات موجود در دستگاه معادلات، بیش‌تر از تعداد معادلات مستقل از هم باشد، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. مثلاً در معادله‌ی  $x + y = 1$  می‌توان بی‌نهایت جفت جواب برای  $x$  و  $y$  پیدا کرد که حاصل جمع‌شان برابر ۱ باشد.

یا در حالتی مانند دستگاه دو معادله‌ی

$$x + y - z = 2 \quad , \quad -3x - 3y + 2z = 1$$

که دارای سه مجهول مستقل نیست و می‌توان با ضرب عدد ۳- در معادله‌ی دوم و جمع دو معادله، مجهولات  $x$  و  $y$  را از محاسبات خارج کرد. در این جا  $z$  یک جواب مشخص دارد (۱-); هم‌چنین  $x$  و  $y$  به هم وابسته‌اند. اگر برای مثال  $x$  را ۸ در نظر بگیریم، برای  $y$  به جواب ۷- می‌رسیم یا اگر  $x$  را "صفر" فرض کنیم، برای  $y$  جواب ۱ حاصل می‌شود. پس برای  $x$  و  $y$ ، بی‌شمار جفت جواب وجود دارد.

مثال

$$\begin{cases} x \cdot y = 0 & (A) \\ x + z = 2 & (B) \\ y + z = 3 & (C) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = ?$$

راه حل

$$B \rightarrow x = 2 - z$$

$$C \rightarrow y = 3 - z$$

$$A \rightarrow (2 - z)(3 - z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow z \in \{2, 3\}$$

10.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ -6x + ay = 10 \end{cases} \quad , \quad n(S.S.) = \infty$$

$$\Rightarrow a = ?$$

A) 6    B) 16    C) -8    D) 8    E) -16

11.

$$\begin{cases} 2ax + 5y = 689 \\ 5ay + 18x = 175 \end{cases} \quad , \quad S.S. = \emptyset$$

$$\Rightarrow a = ?$$

A)  $\pm 1$     B)  $\pm 3$     C)  $\pm 4$     D) 0    E)  $\pm 2$

12.

$$\begin{cases} (2m - 2)x + 5y = 15 \\ 8x - 4y = 2n - 1 \end{cases} \quad , \quad S.S. = R$$

$$\Rightarrow (n, m) = ?$$

A)  $\left(-\frac{11}{2}, \frac{2}{11}\right)$     B)  $\left(\frac{-1}{4}, \frac{-2}{11}\right)$     C)  $\left(-\frac{11}{2}, -4\right)$

D)  $\left(4, \frac{11}{2}\right)$     E) (4, -4)

13.

$$\begin{cases} 2y - 5ax = 6 \\ 9y + a^2x = 13 \end{cases} \quad , \quad n(S.S.) = 1$$

$$\Rightarrow a = ?$$

A)  $R - \{-22.5\}$     B)  $R$     C)  $\emptyset$     D)  $\left\{-\frac{45}{2}\right\}$     E)  $\left\{\frac{45}{4}\right\}$

15.

$$\left. \begin{array}{l} a \neq b, a \neq -b \\ a^2(1-x) + b^2 = b(2a - bx) \end{array} \right\} \Rightarrow x = ?$$

- A)  $a^2 - b^2$       B)  $a - b$       C)  $a + b$   
 D)  $\frac{a-b}{a+b}$       E)  $(a-b)^2$

16.

$$\begin{cases} \frac{z-y}{y} = 3 \\ \frac{x+y}{y} = 4 \\ x+y+z = 64 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z - x = ?$$

- A) 10      B) 8      C) 7      D) 4      E) 5

17.

$$\begin{cases} 10x - 5y + 15z = 17 \\ 30z + 20x + 10y = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = ?$$

- A) 0      B) 1      C) -1      D) 2      E) -2

در این مثال، راه حل واضح تری نیز وجود داشت: با در نظر گرفتن ترم (A)، می دانستیم یکی از متغیرها صفر است. با جایگذاری صفر به جای X و Y به ترتیب در معادلات (B) و (C)، همان نتیجه برای Z بدست می آمد.



تست تسلط

تست الگو:

$$4xy + 3y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{3y+1}{2y+1}$       B)  $\frac{3y+1}{4y+2}$       C)  $\frac{3y-1}{1-2y}$   
 D)  $\frac{3y+1}{2-4y}$       E)  $\frac{3y-1}{2-4y}$

پاسخ تشریحی:

$$4xy + 3y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 4xy - 2x = -3y + 1 \Rightarrow x(4y - 2) = -3y + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3y + 1}{4y - 2} = \frac{3y - 1}{2 - 4y}$$

14.

$$6xy + 5y + 3x = 2$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{-3-5y}{6x+2}$       B)  $\frac{6y-2}{3+5y}$       C)  $\frac{3+6y}{-2-5y}$   
 D)  $\frac{5+3x}{6y-2}$       E)  $\frac{2-5y}{3+6y}$



راه حل

$$\left. \begin{aligned} (x-4)^6 = 0 &\Rightarrow x=4 \\ (x^3 - 27)^2 = 0 &\Rightarrow x=3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{S.S.} = \{3,4\}$$

توضیح برای تیپ ۲:

هرگاه حاصل جمع چند عبارت مثبت صفر شود، آن گاه هریک از آن عبارتها باید صفر باشد تا درستی کل عبارت برقرار شود. در مثال اول می دانیم که حاصل  $5x^4$  و  $6x^2$  همواره مقداری مثبت است و عدد ۵ نیز بزرگتر از صفر است. پس حاصل جمع این سه ترم هیچگاه برابر صفر نمی شود، مگر اینکه هرکدام از آنها منفرداً برابر صفر باشد. در مثال دوم نیز مجدداً شاهد این امر هستیم که حاصل جمع دو عبارت همواره مثبت برابر صفر شده است. پس هر یک از آن دو باید صفر باشد. با جایگذاری، مجموعه جواب برای متغیر  $x$  مشخص می شود.

نکته

اعداد حقیقی با توان زوج، همواره اعدادی مثبت هستند.



تیپ سه :

$$\left. \begin{aligned} (A) \quad x \cdot y = 4 \\ (B) \quad x + y = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x, y = ?$$

راه حل

$$(A) \rightarrow x = \frac{4}{y} \quad (B) \rightarrow \frac{4}{y} + y = 4 \xrightarrow{\times(y)} 4 + y^2 = 4y$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$$



تیپ خاص سؤالات

تیپ یک:

$$\left. \begin{aligned} 2(x+5) + 4x = 6x + k \\ n(\text{S.S.}) = \infty \end{aligned} \right\} \rightarrow k = ?$$

راه حل

$$2x + 10 + 4x = 6x + k \Rightarrow 6x + 10 = 6x + k$$

$$\Rightarrow k = 10$$

توضیح برای تیپ ۱:

هدف، بررسی جواب های یک معادله ی یک مجهولی است.

اگر یک معادله ی یک مجهولی به صورت روبه رو داشته باشیم:

$$ax + b = cx + d$$

۱- در صورتی که  $b = d$  و  $a = c$  باشد، معادله بی شمار جواب دارد.

۲- در صورتی که  $a = c$  و  $b \neq d$  باشد، معادله جواب ندارد.

۳- اگر  $a \neq c$  باشد، معادله تنها یک جواب دارد.



تیپ دو - یک:

$$5x^4 + 6x^2 + 5 = 0 \Rightarrow \text{S.S.} = ?$$

راه حل

$$\text{S.S.} = \emptyset$$

تیپ دو - دو:

$$(x-4)^6 + (x^3 - 27)^2 = 0 \Rightarrow \text{S.S.} = ?$$

## سؤالات فصل دوم (معادله درجه اول و دستگاه های خطی)

### سؤالات نمونه فصل

$$1. \left. \begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= 15 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= 17 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = ?$$

- A)  $\frac{1}{13}$    B)  $\frac{1}{10}$    C)  $\frac{1}{7}$    D)  $\frac{1}{6}$    E)  $\frac{1}{5}$

19 MAYIS ÜNİVERSİTESİ – 2013

$$2. \left. \begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} &= 1 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = ?$$

- A) -6   B) -3   C) -1   D) 1   E) 3

19 MAYIS ÜNİVERSİTESİ – 2013

$$3. \frac{2-5x}{3} = 4-2x$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) 4   B) 6   C) 10   D) 12   E) 14

T.C. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ - 2014

$$4. \left. \begin{aligned} 3x-7y &= 7 \\ 2y-x &= -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x+y = ?$$

- A) 10   B) 11   C) 13   D) 17   E) 19

T.C. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ – 2015

$$5. \frac{1}{x-5} + \frac{1}{3-2y} = 0 \Rightarrow x-2y = ?$$

- A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

19 MAYIS ÜNİVERSİTESİ – 2017

$$6. \left. \begin{aligned} a-b &= 1 \\ a+c &= 7 \\ b-c &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a+c = ?$$

- A) 8   B) 11   C) 15   D) 17   E) 20

YÖGS - 2011

7.

$$x \in \mathbb{Z}^+$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{1}{5}$    B)  $\frac{1}{3}$    C) 3   D) 5   E)  $\frac{1}{7}$

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ – 2017

8.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{5} \\ xy = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \prod_i y_i = ?$$

y'ın alabileceği değerlerin çarpımı nedir?  
According to the equation system above,  
what is the multiplication of the values of y?

- A) 4   B) 2   C) -2   D) -1   E) 1

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ – 2013

9.

$$1 + \frac{24}{2 + \frac{12}{5 + \frac{6}{x-2}}} = 5 \Rightarrow x = ?$$

- A) -2   B) 1   C) 0   D) -1   E) 2

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ – 2017

10.

$$\left. \begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{array} \right\} , 3 - \frac{2}{2 + \frac{4x}{x+2}} = 1$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) 2   B) -1   C)  $-\frac{2}{5}$    D)  $-\frac{1}{5}$    E) 0

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ – 2017

11.

$$\frac{x+4y}{y-x} = 5 \Rightarrow \frac{x}{y} = ?$$

- A)  $\frac{1}{6}$    B) 6   C)  $\frac{9}{4}$    D)  $\frac{4}{9}$    E)  $-\frac{1}{4}$

KARABÜK ÜNİVERSİTESİ – 2017

12.

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = ?$$

- A) -2   B) 2   C) 0   D) 1   E) -1

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ – 2013

## پاسخ تشریحی سؤالات نمونه فصل

1.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= 15 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= 17 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} &= 12 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\frac{1}{a}=x, \frac{1}{b}=y, \frac{1}{c}=z} \begin{cases} x+y=15 \\ y+z=17 \\ x+z=12 \end{cases}$$

« گزینه C

$$\Rightarrow \begin{cases} y+z=17 \\ x+z=12 \end{cases} \Rightarrow y-x=5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=15 \\ y-x=5 \end{cases} \Rightarrow y=10$$

$$y+z=17 \Rightarrow z=7 \Rightarrow c=\frac{1}{7}$$

2.

$$x-3y=0 \Rightarrow x=3y$$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow \frac{3}{3y} - \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow x = -3$$

« گزینه B

3.

$$\frac{2-5x}{3} = 4-2x$$

$$\Rightarrow 2-5x=12-6x \Rightarrow x=10$$

« گزینه C

4.

$$\left. \begin{aligned} 3x-7y &= 7 \\ 2y-x &= -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x-7y &= 7 \\ 6y-3x &= -12 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow -y = -5 \Rightarrow y = 5$$

$$\Rightarrow x = 14$$

« گزینه E

5.

$$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{3-2y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-5} = \frac{-1}{3-2y}$$

$$\Rightarrow x-5 = -3+2y \Rightarrow x-2y=2$$

« گزینه B

6.

$$\left. \begin{aligned} a-b &= 1 & (I) \\ a+c &= 7 & (II) \\ b-c &= 2 & (III) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(I)+(II)+(III)} 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow c = 3$$

« گزینه D

$$3a+c=17$$

7.

$$x \in Z^+$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{2}{x(x+2)} \Rightarrow x=3$$

« گزینه C

8.

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x+5y=3x-3y \Rightarrow 2x=-8y$$

$$\Rightarrow x=-4y$$

$$xy=-4 \Rightarrow -4y^2=-4 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$\Rightarrow \prod y = -1$$

« گزینه D

9.

« گزینه D

$$1 + \frac{24}{2 + \frac{12}{5 + \frac{6}{x-2}}} = 5 \Rightarrow \frac{24}{2 + \frac{12}{5 + \frac{6}{x-2}}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{12}{5 + \frac{6}{x-2}} = 4 \Rightarrow \frac{6}{x-2} = -2 \Rightarrow x = -1$$

10.

« گزینه C

$$3 - \frac{2}{2 + \frac{4x}{x+2}} = 1 \Rightarrow 2 + \frac{4x}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{4x}{x+2} = -1$$

$$\Rightarrow 4x = -x - 2 \Rightarrow x = \frac{-2}{5}$$

11.

« گزینه A

$$\frac{x+4y}{y-x} = 5 \Rightarrow x+4y=5y-5x$$

12.

« گزینه E

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 2 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 0$$

$$x - y + z = 2 \Rightarrow x = 1$$

## سؤالات آخر فصل دوم

1.

$$5(2-x) - 3(x-1) = 5 + 8(1-x)$$

$$\Rightarrow S.S. = ?$$

- A)  $\{0\}$     B)  $\{2\}$     C)  $\mathbb{R}$     D)  $\emptyset$     E)  $\{1,2\}$

2.

$$\frac{x^2-3}{x-2} + \frac{1}{2-x} = 0$$

$$\Rightarrow S.S. = ?$$

- A)  $\{-2\}$     B)  $\{2\}$     C)  $\{-2,2\}$     D)  $\emptyset$   
E)  $\mathbb{R}$

3.

$$\left. \begin{array}{l} a+b+2c=15 \\ 2a+b=9 \\ b+c=6 \end{array} \right\} \Rightarrow a.b.c = ?$$

- A) -8    B) -6    C) 6    D) 12    E) 20

4.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2x+3y}{x+2} = \frac{9}{4} \\ \frac{3x-2y}{x+y} = \frac{7}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow y = ?$$

- A) 1    B) 4    C) 3    D) 14    E) 2

5.

$$\frac{12}{2 + \frac{5}{1 + \frac{3}{a}}} = 3$$

$$\Rightarrow a = ?$$

- A) 2    B)  $\frac{3}{2}$     C) 1    D)  $\frac{1}{2}$     E)  $\frac{2}{3}$

6.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{z} = \frac{4}{3} \\ \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ?$$

- A)  $\frac{1}{2}$     B)  $\frac{3}{4}$     C)  $\frac{43}{48}$     D)  $\frac{23}{24}$     E)  $\frac{15}{16}$

7.

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = 21 \\ 4ax - 2by = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = ?$$

$(x, y) = (2, 3)$

- A) 5    B) 7    C) 4    D) 6    E) 8

8.

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{3x+1}} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) -1    B) -2    C) -3    D) -4    E) -5

9.

$$\frac{x}{7x-4} = 0,15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) 4    B) 5    C)  $\sqrt{6}$     D) 7    E) 8

10.

$$\frac{12}{x+1} - \frac{4}{x-1} = \frac{24}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) 5    B) 4    C) 3    D) 2    E) 1

11.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b \cdot c}{a} = 3 \\ \frac{c \cdot a}{b} = 2 \\ \frac{a \cdot b}{c} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ?$$

- A) 6    B) 8    C) 9    D) 10    E) 11

12.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 10 = 0 \\ 2x - 3y = 6 \\ mx - 2y - 14 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m = ?$$

- A) 4    B) 3    C) 2    D) 1    E) 0

13.

$$3(2x+1) - 6(x-1) + 3(x+1) = -15$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) -9    B) -6    C) -2    D) 2    E) 3

14.

$$2 + \frac{2}{\frac{2}{x} - 2} = 0$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) -2    B) -1    C) 0    D) 1    E) 2

15.

$$\frac{11}{9} - \frac{8}{7 - \frac{6}{5 - \frac{5x+2}{4}}} = -\frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{3}{2}$     B) 2    C)  $\frac{5}{2}$     D) 3    E)  $\frac{7}{2}$

16.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = ?$$

- A)  $\frac{1}{3}$     B)  $\frac{4}{9}$     C)  $\frac{4}{3}$     D) 3    E) 4

17.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 5y = 81 \\ ax + 6y = 100 \\ \text{S.S.} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow a = ?$$

- A) -3    B)  $-\frac{16}{5}$     C)  $-\frac{17}{5}$     D)  $-\frac{18}{5}$     E) -4

18.

$$\left. \begin{array}{l} (m-1)x + 4y - 6 = 0 \\ 2x + (m+1)y + 3 = 0 \\ n(\text{S.S.}) = R \end{array} \right\} \Rightarrow m = ?$$

- A) 3    B) -2    C) 0    D) 2    E) -3

19.

$$\left. \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \\ a^2b = 8 \\ b^2c = 4 \\ ac^2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b + c = ?$$

- A) 3    B) 4    C) 5    D) 6    E) 7

20.

$$\left. \begin{array}{l} (m+3)x + 2y - 1 = 0 \\ (2m-1)x - y + 2 = 0 \\ \text{S.S.} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow m = ?$$

- A)  $-\frac{1}{2}$     B)  $-\frac{1}{3}$     C)  $-\frac{1}{4}$     D)  $-\frac{1}{5}$     E)  $-\frac{1}{6}$

21.

$$\left. \begin{array}{l} x(y+z) = 19 \\ y(x+z) = 21 \\ z(x+y) = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow xy + xz + yz = ?$$

- A) 10    B) 20    C) 30    D) 40    E) 50

22.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 18 \\ x + z = 10 \\ y + z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x+y+z}{x+z} = ?$$

- A) 2    B) 3    C)  $\frac{10}{3}$     D) 4    E)  $\frac{20}{3}$

23.

$$\left. \begin{array}{l} 5a + 4b = 13 \\ 4a + 5b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 - b^2 = ?$$

- A) 10    B) 12    C) 15    D) 16    E) 17

24.

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 3b + c = 4 \\ 4a + b + 3c = 44 \\ 3a + 2b - 2c = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow a = ?$$

- A) 18    B) 10    C) 8    D) 6    E) 4



25.

$$\left. \begin{array}{l} a = -1, 19 \\ b = -2, 39 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{a^2 - b^2}{ab}} = ?$$

- A)  $-\frac{5}{6}$    B)  $-\frac{1}{5}$    C)  $-\frac{1}{2}$    D)  $\frac{5}{18}$    E)  $\frac{5}{6}$

26.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x-2} + \frac{2}{ax} = 5 \\ a = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{1}{3}$    B)  $\frac{2}{3}$    C)  $\frac{5}{3}$    D)  $\frac{7}{3}$    E) 2

27.

$$\frac{\frac{1}{x} + 4 + 4x}{\frac{1}{2x} + 1} = 4 \Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{1}{2}$    B) 2   C) 4   D) 1   E)  $\frac{1}{4}$

28.

$$\left(4x - 4 + \frac{1}{x}\right) : \left(1 - \frac{1}{2x}\right) = 6 \Rightarrow x = ?$$

- A) 6   B) 5   C) 4   D) 3   E) 2

29.

$$x - \frac{1}{1} = 1$$

$$3 + \frac{2x}{x \cdot \left(2 - \frac{x+1}{x}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) -3   B) -2   C) 1   D) 2   E) 3

30.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) = ?$$

- A)  $\left(2, \frac{1}{6}\right)$    B)  $\left(\frac{1}{6}, 2\right)$    C)  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$   
D)  $\left(1, \frac{1}{6}\right)$    E)  $\left(\frac{1}{6}, 1\right)$

31.

$$\frac{x-7}{3} - \frac{x+14}{6} = -4 \Rightarrow x = ?$$

- A) 5   B) 4   C) 3   D) -4   E) -5

32.

$$\frac{3}{x-2} + 3 = \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x} \Rightarrow x = ?$$

- A) -2   B) -1   C) 0   D) 1   E) 2

33.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 2$$

if  $x = 3 \Rightarrow a = ?$

- A) 2                      B) 1                      C) 0  
D) -1                      E) -2

34.

$$\frac{x-1}{1-x} + 1 = 0$$

$\Rightarrow x = ?$

- A)  $\emptyset$                       B)  $R$                       C)  $R \setminus \{1\}$   
D)  $R - \{-1\}$                       E)  $\{-1\}$

35.

$$6 - \frac{4}{1 + \frac{3}{x-3}} = 5$$

$\Rightarrow x = ?$

- A) 1      B) 2      C) 4      D) 5      E) -2

36.

$$\frac{x + \frac{1}{a}}{b} - \frac{x + \frac{1}{b}}{a} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{b}$$

$\Rightarrow x = ?$

- A) 1      B)  $a$       C)  $-a$       D)  $b$       E)  $ab$

37.

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{u} + \frac{3}{y} &= 2 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{4} \\ \frac{2}{u} + \frac{2}{z} &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = ?$$

- A)  $\frac{9}{4}$       B) 2      C)  $\frac{24}{13}$       D)  $\frac{5}{8}$       E) 1

38.

$$\left\{ \begin{aligned} x - y &= 8 \\ 3y - z &= 6 \\ x + 3z &= 12 \end{aligned} \right. \Rightarrow x + y + z = ?$$

- A) 9      B) 10      C) 11      D) 12      E) 13

39.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} &= \frac{1}{6} \\ \frac{5}{x} - \frac{6}{y} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow x = ?$

- A) 12      B) 66      C) 70      D) 72      E) 84

40.

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y+1} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow y + 5x + 3 = ?$

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

41.

$$\begin{cases} mx - ny = 3 \\ nx - my = 5 \\ m - n = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y = ?$$

- A) -2    B) -1    C) 0    D) 1    E) 2

42.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{y} = ?$$

- A)  $\frac{6}{5}$     B) 1    C)  $\frac{5}{6}$     D)  $\frac{2}{3}$     E)  $\frac{1}{2}$

43.

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{2} = x + \frac{x-1}{3}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{5}{18}$     B)  $\frac{6}{13}$     C)  $\frac{-6}{13}$     D)  $\frac{2}{3}$     E)  $-\frac{2}{3}$

44.

$$\frac{3(x-2)}{4} - \frac{2-x}{2} = x + \frac{x}{4} - \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) 4    B)  $R - \{2\}$     C) 0    D)  $\frac{1}{2}$     E)  $R$

45.

$$(3x - 2)^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\}$     B)  $\frac{5}{3}$     C)  $-\frac{1}{3}$   
D)  $\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\}$     E)  $\emptyset$

46.

$$(2x + 1)(x - 3) = (3x + 2)(x - 3)$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\{3, -1\}$     B)  $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$     C)  $\{-\frac{1}{2}, 3\}$   
D)  $R$     E)  $\{\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\}$

47.

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\{-2, 2\}$     B)  $\emptyset$     C) 2    D)  $R - \{2\}$     E) -2

48.

$$\frac{6}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A) -1    B)  $\emptyset$     C)  $\{-1, 1\}$     D) 1    E) 0

49.

$$\frac{12}{6} = 4$$

$$1 + \frac{2x-1}{2+\frac{2x-1}{3}}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)1    B)2    C)3    D)4    E)5

50.

$$3 + \frac{4}{3 + \frac{x+2}{x-1}} = 5$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $-\frac{1}{2}$     B)1    C)  $\frac{1}{2}$     D)  $\frac{3}{2}$     E)-2

51.

$$\frac{x}{x-2} + \frac{3x+1}{x+2} = \frac{2}{x-2} + 3$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)-2    B)-1    C)1    D)2    E)3

52.

$$\frac{a}{x} + c = \frac{a(b+c)}{bx}$$

$$\Rightarrow x = ?$$

- A)  $\frac{a}{b}$     B)  $\frac{a}{c}$     C)a    D)b    E)c

53.

$$\text{if } y = 2x + m, y = (m+n)x + 3$$

$$(x, y) = (1, 4) \Rightarrow n = ?$$

- A)0    B)-1    C)2    D)3    E)4

54.

$$\text{if } 3x + 2y = -4, 4x - 3y = -11$$

$$\Rightarrow (x, y) = ?$$

- A)(1,2)    B)(2,-1)    C)(-2,1)  
D)(2,1)    E)(-1,-2)

55.

$$\text{if } \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 3, \frac{3x}{4} - \frac{y}{4} = 4$$

$$\Rightarrow (x, y) = ?$$

- A)(2,3)    B)(6,2)    C)(1,6)  
D)(3,6)    E)(2,5)

56.

$$(3x - y - 4)^2 + (2x + 3y - 10)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x + y = ?$$

- A)1    B)2    C)3    D)4    E)5

57.

$$\text{if } \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 1, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

$$\Rightarrow (x, y) = ?$$

A) (1, 2)      B) (2, -1)      C)  $(1, \frac{1}{2})$

D) (-1, 2)      E)  $(-\frac{1}{2}, 1)$

58.

$$\text{if } \frac{x+1}{y+1} = \frac{3}{2}, \frac{2x-3}{y+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = ?$$

A)  $\frac{1}{2}$       B) 1      C)  $\frac{3}{2}$       D) 2      E)  $\frac{5}{2}$

59.

$$\text{if } \frac{x-y}{2} - x = 20, \frac{y-x}{3} + y = 10$$

$$\Rightarrow x - y = ?$$

A) -34      B) -36      C) 34      D) 36      E) 0

60.

$$\text{if } 6x + y = 162, \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (x, y) = ?$$

A) (15, 32)      B) (3, 18)      C) (45, 9)

D) (18, 54)      E) (12, 24)

61.

$$\text{if } 7x + 6y + 5z = 25, 4x + 3y + 2z = 4$$

$$\Rightarrow x + y + z = ?$$

A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8

62.

$$\text{if } x + y + z = 20, 3x - 2y - 2z + 10$$

$$\Rightarrow x = ?$$

A) 5      B) 7,5      C) 10      D) 12,5      E) 15

63.

$$\text{if } 2a + b - c = 5, a - 2b + 2c = 4$$

$$\Rightarrow 5a - 5b + 5c = ?$$

A) 9      B) 11      C) 13      D) 15      E) 17

64.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 30 \\ x + 3y + z = 34 \\ x + y + 3z = 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y + z = ?$$

A) 20      B) 25      C) 30

D) 35      E) 40

65.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ 2x + y + z = 5 \\ x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = ?$$

- A) -2    B) -1    C) 0    D) 1    E) 2

66.

$$\frac{3(a-1)}{2} + \frac{9a+4}{6} = 3a-7$$

$$\Rightarrow a = ?$$

- A)  $\emptyset$     B) 3    C) 2    D) 6    E) R

67.

$$\frac{5n-1}{2} - \frac{3n+4}{3} = \frac{3(3n-4)+1}{6}$$

$$\Rightarrow n = ?$$

- A)  $\emptyset$     B) -5    C) -1    D) 4    E) R

68.

$$(a-1)x + b + 4 = 4x + 6$$

$$\Rightarrow (a,b) = ?$$

- A) (1, -4)    B) (1, 6)    C) (4, 6)  
D) (5, 2)    E) (5, 6)

69.

$$\text{if } \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{2}, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (x, y) = ?$$

- A) (6, 2)    B) (6, 3)    C) (6, 4)  
D) (2, 3)    E) (3, 2)

70.

$$\begin{cases} (2m-1)x - y + n = 0 \\ (m+2)x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \times n = ?$$

- A)  $\frac{1}{8}$     B)  $\frac{1}{7}$     C)  $\frac{2}{7}$     D)  $\frac{3}{8}$     E)  $\frac{4}{9}$

71.

$$\begin{cases} x, y \in R \\ -6x + 3y + 5 = 0 \\ (a-1)x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ?$$

- A) 5    B) 6    C) 7    D) 8    E) 9

72.

$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 17 \\ 6x + 4y + 5z = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y + z = ?$$

- A) 4    B) 5    C) 6    D) 7    E) 8

73.

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 7 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow x + y - z = ?$$

- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

74.

$$\begin{cases} a - b = 7 \\ c - b = 4 \\ c + d = -2 \end{cases} \\ \Rightarrow a + d = ?$$

- A) -2    B) -1    C) 1    D) 2    E) 4

75.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 8z = 8 \\ 6x - 3y + 12z = 36 \end{cases} \Rightarrow x + 2z = ?$$

- A) 1    B) 2    C) 3    D) 4    E) 5

76.

$$\text{if } x \leq 4, x - 2y + 6 = 0 \\ \Rightarrow \max(y) = ?$$

- A) 3    B) 4    C) 5    D) 6    E) 7

77.

$$\frac{a}{0.02} = b, 2 < a < 3 \\ \Rightarrow \max(\text{range}(b)) = ?$$

- A)  $50 < b < 100$     B)  $50 < b < 250$   
C)  $100 < b < 125$     D)  $100 < b < 150$   
E)  $100 < b < 200$

78.

$$3mx - 4 = (m + 4)x + n + 1 \\ \text{if } x = R \Rightarrow m \times n = ?$$

- A) -6    B) -10    C) -12    D) 8    E) 10

79.

$$4 + 3(1 - x) = x - 4(2 + x) \\ \Rightarrow x = ?$$

- A)  $R$     B)  $\{-2\}$     C)  $\{0\}$   
D)  $\{1\}$     E)  $\emptyset$

## کلید سؤالات نمونه فصل دوم

1	2	3	4	5	6
C	B	C	E	B	D
7	8	9	10	11	12
C	D	D	C	A	E

## کلید سؤالات تست تسلط

1	2	3	4	5	6
E	C	B	E	A	C
7	8	9	10	11	12
A	E	B	D	B	C
13	14	15	16	17	
A	E	D	B	C	

## کلید سؤالات آخر فصل دوم

1	2	3	4	5	6
C	A	E	E	A	C
7	8	9	10	11	12
E	B	D	A	E	B
13	14	15	16	17	18
A	E	B	C	D	E
19	20	21	22	23	24
C	D	C	A	D	A
25	26	27	28	29	30
E	D	A	E	D	E
31	32	33	34	35	36
B	B	B	C	C	A
37	38	39	40	41	42
C	E	A	B	B	A
43	44	45	46	47	48
C	E	D	A	E	B
49	50	51	52	53	54
B	A	E	A	B	C
55	56	57	58	59	60
B	D	C	B	B	D
61	62	63	64	65	66
D	C	E	A	E	A
67	68	69	70	71	72
E	D	E	C	E	A
73	74	75	76	77	78
C	C	D	C	D	B
79					
E					



## ویژگی‌های این مجموعه:

- ✕ ارائه‌ی درسنامه‌ی جامع
- ✕ بیش از ۵۰۰ سوال با ارائه‌ی پاسخ‌های تشریحی
- ✕ بیش از ۱۰۰۰ سوال چندگزینه‌ای شبیه‌ساز آزمون‌های یوس
- ✕ تیپ‌بندی سوالات
- ✕ ارائه‌ی تست‌های تسلط جهت طبقه‌بندی مباحث دروس

یوس‌کوئیز، برجسته‌ترین پلتفرم آنلاین آموزش یوس در ایران

